3 次方程式の解の公式を導く

3 次方程式は一般に x^3 の係数で割ってやれば,

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{0.1}$$

の形で表せる．ここで変数変換,

$$x = y - \frac{a}{3} \tag{0.2}$$

を施すと,

$$\begin{aligned}
x^3 + ax^2 + bx + c &= \left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c \qquad (0.3)\\
&= \left(y^3 - ay^2 + \frac{1}{3}a^2y - \frac{1}{27}a^3\right) + a\left(y^2 - \frac{2}{3}ay + \frac{1}{9}a^2\right) + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c \qquad (0.4)\\
&= y^3 + \left(\frac{1}{3}a^2 - \frac{2}{3}a^2 + b\right)y + \left(-\frac{1}{27}a^3 + \frac{1}{9}a^3 - \frac{1}{3}ab + c\right) \qquad (0.5)\\
&= y^3 + \left(-\frac{1}{3}a^2 + b\right)y + \left(\frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c\right) \qquad (0.6)
\end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned}
p &\equiv \frac{1}{3}a^2 - \frac{2}{3}a^2 + b, \qquad (0.7)\\
q &\equiv \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c, \qquad (0.8)
\end{aligned}$$

と置けば任意の 3 次方程式が,

$$y^3 + py + q = 0, \tag{0.9}$$

に変形できることになる．そこでこの方程式を解こう．

まず,

$$y = u + v \tag{0.10}$$

と置くと，方程式 (0.9) は,

$$\begin{aligned}
0 &= (u+v)^3 + p(u+v) + q \qquad (0.11)\\
&= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q \qquad (0.12)\\
&= u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + p(u+v) + q \qquad (0.13)\\
&= u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u+v) \qquad (0.14)
\end{aligned}$$

従って，もし,

$$\begin{aligned}
u^3 + v^3 + q &= 0, \qquad (0.15)\\
3uv + p &= 0, \qquad (0.16)
\end{aligned}$$

を満たす，u, v が見つかれば，$y = u + v$ は解になる．この 2 つの式から,

$$\begin{aligned}
u^3 + v^3 &= -q, \qquad (0.17)\\
u^3v^3 &= -\frac{1}{27}p^3, \qquad (0.18)
\end{aligned}$$

が得られる．ここで,

$$(u^3+v^3)^2 - (u^3-v^3)^2 = \left[u^3 + v^3 + (u^3 - v^3)\right]\left[u^3 + v^3 - (u^3 - v^3)\right] = 2u^3 \cdot 2v^3 = 4u^3v^3, \tag{0.19}$$

より,

$$(u^3 - v^3) = (u^3+v^3)^2 - 4u^3v^3 = (-q)^2 + \frac{4}{27}p^3, \tag{0.20}$$

が得られるので,

$$u^3 - v^3 = \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}, \tag{0.21}$$

または

$$u^3 - v^3 = -\sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}, \tag{0.22}$$

となるが，いま u, v は $y = u + v$ の定義において対称だから，$u \geq v$ として一般性を失わない．従って,

$$u^3 - v^3 = \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}, \tag{0.23}$$

と仮定しよう．これと，(0.17) より,

$$u^3 = \frac{1}{2}\left(-q + \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}\right), \tag{0.24}$$

$$v^3 = \frac{1}{2}\left(-q - \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}\right), \tag{0.25}$$

が得られる．ここで u, v ともに 3 乗根で表されることが分かったので，次の式を考える:

$$x^3 = 1 \tag{0.26}$$

この式は，変形すると,

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1) = 0, \tag{0.27}$$

と表せるから，(0.26) の解は,

$$x = 1, x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \tag{0.28}$$

ここで

$$\omega \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \tag{0.29}$$

と置くと，(0.27) より,

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0, \tag{0.30}$$

従って,

$$\omega^2 = -1 - \omega = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \tag{0.31}$$

となりもう一つの複素数の立方根になる．また当然 $\omega^3 = 1$ だから，結局全ての 1 の立方根は $\omega, \omega^2, \omega^3$ で表せることになる．この事実を用いると，u, v の立方根は,

$$U = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-q + \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}\right)}, \tag{0.32}$$

$$V = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-q - \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}\right)}, \tag{0.33}$$

と置いたとき，U, $U\omega$, $U\omega^2$ と V, $V\omega$, $V\omega^2$ がそれぞれの解となるが，実際には条件式 (0.16) を満たすように組み合わせなければならないが,

$$UV = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-q + \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}\right)}\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-q - \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}\right)} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}\left[q^2 - \left(q^2 + \frac{4}{27}p^3\right)\right]} = \sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}} = -\frac{1}{3}p \tag{0.34}$$

より，u, v の中身に掛かる ω の次数の和は必ず 3 にならなければならない．これより，解は,

$$y = U + V,\ U\omega + V\omega^2,\ U\omega^2 + V\omega \tag{0.35}$$

の 3 つとなることが分かった．なお,

$$p \equiv \frac{1}{3}a^2 - \frac{2}{3}a^2 + b, \tag{0.36}$$

$$q \equiv \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c, \tag{0.37}$$

であった.