-1.2　複素ガウス積分を求める

ここでは，$a > 0$ かつ，Y が実数の場合，複素数の混じったガウス積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-a(x+iY)^2]dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{1}$$

が成り立つことを証明します．証明には複素解析の知識を用います．

証明． 図のように，閉曲線 C にそって積分経路をとると，

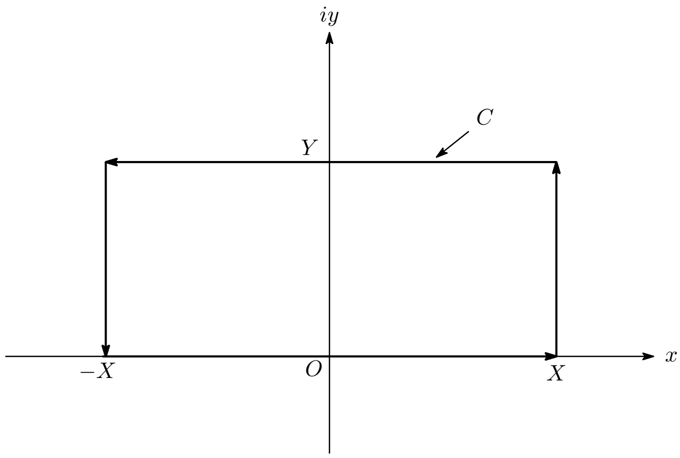

図 1: 積分経路

$$I_C = \int_{-X}^{X} \exp[-a(x+0)^2]dx + \int_0^Y \exp[-a(X+iy)^2]dy + \int_X^{-X} \exp[-a(x+iY)^2]dx + \int_Y^0 \exp[-a(-X+iy)^2]dy \tag{2}$$

が成り立ちます．ここで右辺第 2 項の絶対値を取ると，

$$\left|\int_0^Y \exp[-a(X+iy)^2]dy\right| \leq \int_0^Y \left|\exp[-a(X+iy)^2]\right| dy \tag{3}$$

$$= \int_0^Y \left|\exp[-a(X^2+2iyX-y^2)]\right| dy \tag{4}$$

$$= \int_0^Y |\exp[-a2iyX]| \left|\exp[-a(X^2-y^2)]\right| dy \tag{5}$$

$$= \int_0^Y \left|\exp[-aX^2+ay^2)]\right| dy \tag{6}$$

$$\leq Y \exp[-aX^2+aY^2)] \tag{7}$$

$$\overset{X\to\infty}{\to} 0 \tag{8}$$

より $X \to \infty$ でこの積分は 0 に絶対収束する．これより，全く同様にして第 4 項も 0 に絶対収束するので，結局，

$$I_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-a(x+0)^2]dx + \int_{\infty}^{-\infty} \exp[-a(x+iY)^2]dx \tag{9}$$

$$= \tag{10}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-ax^2]dx - \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-a(x+iY)^2]dx \tag{11}$$

が成り立つが，$\exp(-az^2)$ は経路 C の内部に極を持たないから，留数定理より，一周の積分 I_C はゼロに等しく，その極限をとった I_∞ もゼロに等しい．よって，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-a(x+iY)^2]dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-ax^2]dx \tag{12}$$

この式の右辺は (実数の) ガウス積分でその値は，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-ax^2]dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{13}$$

だから，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-a(x+iY)^2]dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{14}$$

が示せた． $\square$