0.1　2 重積分の変数変換

Ω, D を $\mathbb{R}^2$ の有界かつ面積確定な領域、$\mathit{\Phi}:\Omega\to D$ を $\mathbb{C}^1$ 級、1 対 1 上への写像とする。$\mathit{\Phi}$ が $x=X(u,v), y=Y(u,v)$ で与えられ、そのヤコビアン $J(u,v)$ が、

$$J(u,v)=\frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}=det\begin{bmatrix}\dfrac{\partial X}{\partial u} & \dfrac{\partial X}{\partial v}\\ \dfrac{\partial Y}{\partial u} & \dfrac{\partial Y}{\partial v}\end{bmatrix}\neq 0$$

が、任意の $(u,v)\in\Omega$ に対して成り立つとき、D 上で 2 重積分可能な任意の関数 $f(x,y)$ に対して、

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_\Omega f(X(u,v),Y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

が成り立つ。

証明概略. 下の図において、

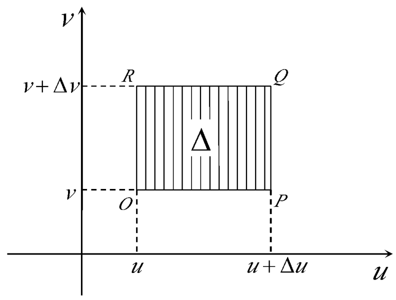

図 1: uv 平面

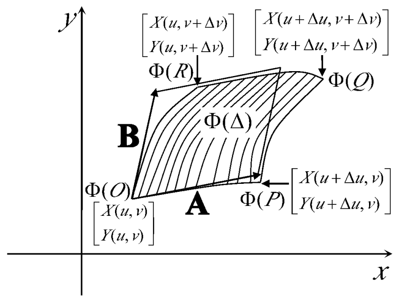

図 2: xy 平面

Ω の分割領域の一つを Δ とすると、図 1 の領域 Δ は、図 2 の領域の $\mathit{\Phi}(\Delta)$ に移る。ここで、

$$\begin{bmatrix}X(u+\Delta u,v)-X(u,v)\\ Y(u+\Delta u,v)-Y(u,v)\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}\dfrac{\partial X}{\partial u}\Delta u\\ \dfrac{\partial Y}{\partial u}\Delta u\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}$$

$$\begin{bmatrix}X(u,v+\Delta v)-X(u,v)\\ Y(u,v+\Delta v)-Y(u,v)\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}\dfrac{\partial X}{\partial u}\Delta v\\ \dfrac{\partial Y}{\partial u}\Delta v\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}$$

であるが、領域 $\varPhi(\Delta)$ は、平行四辺形 $\varPhi(O)\varPhi(P)\varPhi(Q)\varPhi(R)$ と一次のオーダーで一致し、平行四辺形 $\varPhi(O)\varPhi(P)\varPhi(Q)\varPhi(R)$ は、一次のオーダーでベクトル $\boldsymbol{A}$ とベクトル $\boldsymbol{B}$ が囲む平行四辺形の領域と一致するので、

$$
\begin{aligned}
\varPhi(\Delta)\ \text{の面積} &\equiv \mu(\varPhi(\Delta)) \\
&= \|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}\| + o(\Delta u \Delta v) \\
&= \left| det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial u} & \dfrac{\partial X}{\partial v} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial u} & \dfrac{\partial Y}{\partial v} \end{bmatrix} \right| \Delta u \Delta v + o(\Delta u \Delta v) \\
&= \left| \frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)} \right| \Delta u \Delta v + o(\Delta u \Delta v)
\end{aligned}
$$

従って、

$$
\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)dxdy &= \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \sum_{(x_i,y_j)\in D} f(x_i,y_j)\Delta x \Delta y \\
&= \lim_{\Delta u, \Delta v \to 0} \sum_{(u_i,v_j)\in \Omega} f(X(u_i,v_j),Y(u_i,v_j))\mu(\varPhi(\Delta)) \\
&= \lim_{\Delta u, \Delta v \to 0} \sum_{(u_i,v_j)\in \Omega} f(X(u_i,v_j),Y(u_i,v_j)) \left| \frac{\partial(X(u_i,v_j),Y(u_i,v_j))}{\partial(u_i,v_j)} \right| \Delta u \Delta v \\
&= \iint_\Omega f(X(u,v),Y(u,v) \left| \frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)} \right| dudv
\end{aligned}
$$

□