1　テイラーの定理の応用

テイラーの定理において $f(x)$ を $n=\infty$ まで展開出来たとき，テイラー展開と呼ぶ．特に $x=0$ を中心として展開したものをマクローリン展開と呼ぶ．ここでは代表的な展開公式として，$(1+x)^\alpha$ のマクローリン展開を求め，そこから $\arcsin x$ のマクローリン展開を求める．

マクローリン展開

$x=0$ を中心としたテイラー展開を特にマクローリン展開と呼ぶ．具体的には次の公式となる:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(0)}{n!}x^n$$

この等式は $f(x)$ が無限回微分可能であって，しかも右辺の級数が収束する場合とそのような範囲の x 以外では一般に成立しない．しかし収束範囲についての厳密な理論はやや難解であり，また通常常識的な感覚で分かる場合も多い．ここでは厳密な説明はさけ簡明であることを優先する．

ポッホハマーの記号

任意の実数 α に対して，

$$\begin{aligned}(\alpha)_0 &\overset{\text{def}}{=} 1\\ (\alpha)_n &\overset{\text{def}}{=} \prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1) \qquad (n\in\mathbb{N})\end{aligned}$$

などと表す事にする．ここで $(\alpha)_0$ をポッホハマーの記号と呼ぶ．

一般の二項定理

α を任意の実数とする. このとき，$|x|<1$ の範囲で以下の等式が成り立つ.

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{(n)_n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!}x^n$$

証明

$$f(x) = (1+x)^\alpha$$

とおく，マクローリン展開を用いて証明しよう．いま n を任意の自然数とするとき，$f(x)$ の n 回微分 $f^n(x)$ は,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \alpha \cdot (\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \\ &= (\alpha)_n(1+x)^{\alpha-n} \end{aligned}$$

が成り立つ． ここでこの等式は任意の α で成り立つ事に注意する． 例えば $\alpha = 1$ とすると当然 $f^{(5)}(x) = 0$ であるがそのような場合でも上の等式は成り立つ．従って,

$$f^{(n)}(0) = (\alpha)_n$$

が成り立つから,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} x^n$$

が示された.

逆三角関数

さて，この一般の二項定理を応用すると $\arctan x$ や $\arcsin x$ をマクローリン展開したものと同じものが導ける．以下にそれを示そう.

$$\begin{aligned} y = \arctan x &\Leftrightarrow x = \tan y, \\ \therefore \frac{dx}{dy} &= \frac{1}{\cos^2 y}, \end{aligned}$$

ここで,

$$\frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$$

だから,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1},$$

を得る．よってこの右辺に二項定理を適用して,

$$\frac{dy}{dx} = (1+x^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)_n}{n!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)\cdot(-2)\cdots(-n)}{n!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n},$$

ここで，　右辺の項別積分が出来ると仮定すると，

$$\arctan x = y = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1},$$

を得る．　ここで実は一般の二項定理の場合，$x=1$ では一般に収束しないのであるがこのケースではプラスとマイナスで打ち消しあって $x=1$ においても辛うじて収束する．これを代入すると，

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \cdots$$

という不思議な公式が現れる．多少煩雑にはなるが，同じ方法で $\arcsin x$ も展開できる．

$$\begin{aligned} y = \arcsin x &\Leftrightarrow x = \sin y, \\ \therefore \frac{dx}{dy} &= \cos y, \end{aligned}$$

ここで，$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ で $\cos y > 0$ だから，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

を得る．後は二項定理を用いるだけである．

$$\frac{dy}{dx} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_n}{n!}(-x^2)^n$$

ここで，初項は，

$$\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_0}{0!}(-x^2)^0 = 1$$

であり，第 n 項は，

$$\begin{aligned} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_n}{n!}(-x^2)^n &= (-1)^n \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^{2n} \\ &= (-1)^n \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1+2}{2}\right)\left(-\frac{1+4}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1+2n-2}{2}\right)}{n!}x^{2n} \\ &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!}x^{2n} \end{aligned}$$

が成り立つから，$\arcsin 0 = 0$ に注意して項別積分すると，

$$y = \quad x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!(2n+1)}x^{2n+1}$$

が得られる．ここで例えば $x = \dfrac{1}{2}$ と取れば,

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!(2n+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{3n+1} n!(2n+1)}$$

つまり,

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4\cdot 3} + \frac{1\cdot 3}{2^7\cdot 2!\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^{10}\cdot 3!\cdot 7} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{3n+1} n!(2n+1)} + \cdots$$

となることが示された．これは $x = \dfrac{1}{2} < 1$ より $\arctan x$ を用いたより早く収束するものと思われる．実際，第 4 項までの和より π を計算すると,

$$\begin{aligned}
\pi &= 6\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) \\
&\simeq 6\cdot\frac{1}{2} + 6\cdot\frac{1}{2^4\cdot 3} + 6\cdot\frac{1\cdot 3}{2^7\cdot 2!\cdot 5} + 6\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^{10}\cdot 3!\cdot 7} \\
&= 3 + \frac{1}{8} + \frac{9}{640} + \frac{15}{7168} \\
&= 3 + \frac{5059}{35840} \\
&\simeq 3.141155
\end{aligned}$$

一方，$\arctan 1$ を用いると,

$$\begin{aligned}
\pi &= 4\arctan 1 \\
&\simeq 4\cdot 1 - 4\cdot\frac{1}{3} + 4\cdot\frac{1}{5} - 4\cdot\frac{1}{7} \\
&= 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} \\
&= 3 - \frac{11}{105} \\
&\simeq 2.895238
\end{aligned}$$

となり計算は単純だが収束速度ははるかに遅い事が分かる．　これは何も $\arctan x$ を用いた事が悪いというより，計算に使用する値として収束半径ぎりぎりの $x = 1$ を用いたことによる. π の計算は他にもいろいろ知られなかには $\arctan x$ を用いてより収束が早く計算しやすいものも存在する．近年まで π の実用的な計算方法といえばこのような展開公式を用いるほか無かったのだが，最近は別の方法でもっと桁数の大きい場合に処理が早くなる方法が発見されたようである．が，そのあたりの話は私はよく知らない．このような π の計算公式は三角関数の組合せを考えれば無数にあり，従ってまだ発見されていないものも多数あるはずである．興味がある方は, 既に発見された公式を集めて，そこから逆に発見されていない公式を探してみるのも楽しいかもしれない．この分野はアマチュアの数学愛好家にも比較的に手が出しやすい分野のように思われる．