二項分布の平均と分散

定義 0.1 (**二項分布**)**.** 各回の試行で事象 A の起こる確率が $p(0 < p < 1)$ とする．　このとき，　この試行を n 回反復して A の起こる回数を確率変数 X とするとき，　X が従う確率分布を**二項分布**と呼ぶ．

定理 0.2.

$$P(X = r) = {}_nC_r p^r q^{n-r}, \quad q = 1 - p, \quad r = 0,\ 1,\ \cdots,\ n$$

定理 0.3.

$$E(x) = np$$

定理 0.4.

$$V(X) = npq, \quad \sigma(X) = \sqrt{npq}$$

定理 0.2**. の証明.** 各回 (p, q) のうち片方を選ぶのが実際に起こる事象であるから，　$p^r q^{n-r}$ の係数は $(p+q)^n$ を展開したときの $p^r q^{n-r}$ の係数に等しい．故に二項定理より，　それは ${}_nC_r$ である． □

定理 0.3**. の証明.** 期待値の定義より，

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{r=0}^{n} rP(X = r) \\
&= \sum_{r=0}^{n} r_n C_r p^r q^{n-r} \\
&= \sum_{r=1}^{n} r \frac{n!}{(n-r)!r!} p^r q^{n-r} \\
&= \sum_{r=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{\{n-1-(r-1)\}!(r-1)!} pp^{r-1} q^{n-1-(r-1)} \\
&= np \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-s)!(r-1)!} p^s q^{n-1-s} \\
&= np \sum_{s=0}^{n-1} {}_{n-1}C_s p^s q^{n-1-s} \\
&= np(p+q)^{n-1} \\
&= np
\end{aligned}$$

□

定理 0.4. の証明.

$$
\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\
&= \sum_{r=0}^{n} r^2 P(X=r) - (np)^2 \\
&= \sum_{r=0}^{n} r^2 {}_nC_r p^r q^{n-r} - (np)^2 \\
&= \sum_{r=1}^{n} r^2 \frac{n!}{(n-r)!r!} p^r q^{n-r} - (np)^2 \\
&= \sum_{r=1}^{n} r \frac{n(n-1)!}{\{n-1-(r-1)\}!(r-1)!} p p^{r-1} q^{n-1-(r-1)} - (np)^2 \\
&= np \sum_{s=0}^{n-1} (s+1) \frac{(n-1)!}{(n-1-s)!s!} p^s q^{n-1-s} - (np)^2 \\
&= np \sum_{s=0}^{n-1} (s+1) {}_{n-1}C_s p^s q^{n-1-s} - (np)^2 \\
&= np \sum_{s=0}^{n-1} s\, {}_{n-1}C_s p^s q^{n-1-s} + np \sum_{s=0}^{n-1} {}_{n-1}C_s p^s q^{n-1-s} - (np)^2 \\
&= np(n-1)p + np(p+q)^{n-1} - (np)^2 \\
&= n^2p^2 - np^2 + np - (np)^2 \\
&= np(1-p) \\
&= npq
\end{aligned}
$$

□