自然対数の底 e を含む微分

定理 0.1.

$$\frac{d}{dx}\log_e|x| = \frac{1}{x} \qquad (\text{但し}, x \neq 0)$$

証明. 微分の定義より,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\log_e|x| &= \lim_{h\to 0}\frac{\log_e|x+h| - \log_e|x|}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\log_e\left|\frac{x+h}{x}\right|\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\log_e\left|1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right|^{\frac{x}{h}} \qquad \text{(i)}\end{aligned}$$

ここで $h \to 0$ のとき, $\dfrac{x}{h} \to \pm\infty$ だから,

$$\lim_{t\to\pm\infty}\left|1+\frac{1}{t}\right|^{t} = e$$

を用いると, (i) の右辺の対数は $\log_e e = 1$ に近づいてゆく. よって,

□

$$\frac{d}{dx}\log_e|x| = \frac{1}{x}\cdot 1 = \frac{1}{x}$$

が得られた.

定理 0.2.

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

証明.
$y = e^x$ とおくと,

$$\log_e y = x \qquad (\forall y > 0)$$

だから, 定理 0.1. より, この両辺を x で微分すると, 合成関数の微分法より,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1$$

よって,

$$\frac{dy}{dx} = y = e^x$$

が得られる. □