自然対数の底 e

定理 0.1. x を実数, n を自然数とするとき,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

証明. 任意の充分大きい x に対し, $n\leq x<n+1$ なる自然数 n が存在する. このとき,

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\leq\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^x<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

が成り立っている. ここで, e の定義より, 左辺は

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)\cdot\frac{n}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right\}^{1-\frac{1}{n+1}}=e$$

同様に右辺も

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=e$$

となるので, 挟みうちより

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

となることが示された. □

定理 0.2. x を実数, n を自然数とするとき,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

証明.

$y=-x$ とおくと,

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left(1+\frac{1}{-y}\right)^{-y}=\left(\frac{1-y}{-y}\right)^{-y}=\left(\frac{y}{y-1}\right)^y=\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)$$

ここで $x\to-\infty$ のとき $y\to\infty$ だから右辺は明らかに e に収束する.よって

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

が示された. □

定理 0.3. x を実数とするとき,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left|1+\frac{1}{x}\right|^x=e$$

証明.

定理 0.1 及び定理 0.2 より明らか. □