自然対数の底 e にまつわる問題

問題 0.1. n を正の整数とし,

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

とおきます. 次の問いに答えなさい.

(1) n を大きくするとき a_nは増加, b_nは減少することを示しなさい.

(2) 数列 a_n, b_nは共通な極限値に収束することを確かめなさい.

解答.

(1) $a_{n-1} < a_n$, $b_n < b_{n-1}$ を示せばよい. いま,

$$\begin{aligned}
& a_{n-1} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = a_n \text{とすると,} \\
& n^n(n-1)^n \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < n^n(n-1)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
\therefore\quad & n^n(n-1+1)^{n-1}(n-1) < (n-1)^n(n+1)^n \\
\therefore\quad & n^{2n-1}(n-1) < (n^2-1)^n \\
\therefore\quad & n^{2n} - (n^2-1)^n < n^{2n-1} && (\mathrm{i})
\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}
& b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n = b_{n-1} \text{とすると,} \\
& n^{n+1}(n-1)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < n^{n+1}(n-1)^n \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n \\
\therefore\quad & (n-1)^n (n+1)^{n+1} > n^{n+1} (n-1+1)^n \text{ より,} \\
\therefore\quad & (n-1)^n (n+1)^{n+1} < n^{2n+1} \\
\therefore\quad & (n^2-1)^n(n+1) < n^{2n+1} \\
\therefore\quad & (n^2-1)^n < n^{2n+1} - (n^2-1)n \\
\therefore\quad & (n^2-1)^n < n\{n^{2n} - (n^2-1)\} && (\mathrm{ii})
\end{aligned}$$

以上より (i), (ii) を示せばよい.

いま, 一般に

$$A^n - B^n = (A-B)\sum_{k=0}^{n-1} A^k B^{n-1-k}$$

だから, $A = n^2$, $B = n^2 - 1$ とおけば,

$$B^{n-1} < A^k B^{n-1-k} < A^{n-1}$$

より,

$$n \times (n^2-1)^{n-1} < n^{2n} - (n^2-1)^n < n \times n^{2(n-1)} = n^{2n-1} \quad \text{(iii)}$$

だから,(iii) の右側の不等式は (i) そのものである. また (iii) の左側の不等式の両辺に n を掛けると,

$$(n^2-1)^n < n^2 \times (n^2-1)^{n-1} < n\left\{n^{2n} - (n^2-1)^n\right\}$$

となりこれは (ii) に一致する.

(2) $a_n < b_n$であり, $a_n < b_1 = 4$ であるから,

$$0 < b_n - a_n = a_n\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1\right\} < \frac{4}{n}$$

で右辺は 0 に近づくから,$n \to \infty$ のとき $b_n - a_n \to 0$ である.

したがって区間縮小法により, 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ はともに共通の極限値に収束する.

□