円の求積の図形的イメージ

定積分の具体的イメージの良い例として、ここでは円を挙げよう．定積分では、面積は細かい面積の和の極限として求められる．円の面積を求める場合はどうなるか？ここでは、極限操作は後回しとして、円の面積を細かい断片に分割することから始めよう．あまり複雑ではない分割をちょっと考えてみると、次のようなものがあることがイメージできる：

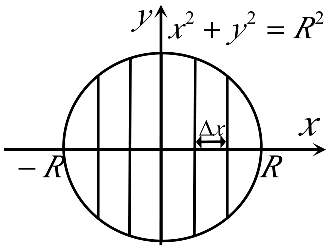


図 1: x 軸方向

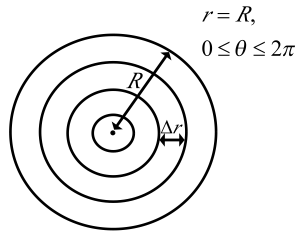


図 2: r 軸方向

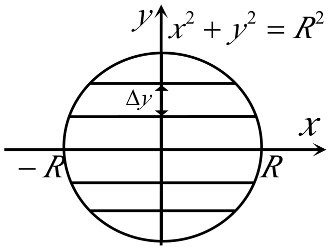


図 3: y 軸方向

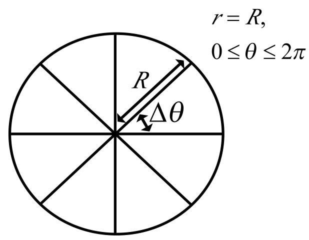


図 4: θ 軸方向

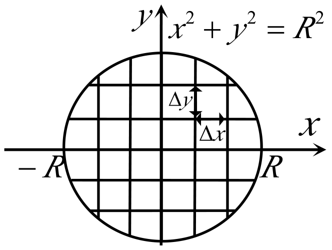


図 5: xy 軸方向

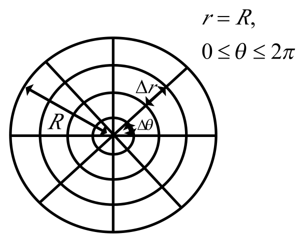
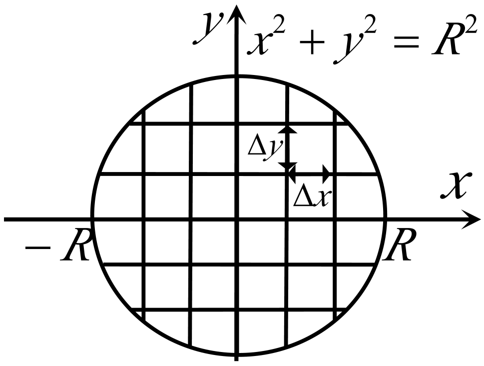


図 6: $r\theta$ 軸方向

さて、定積分は細かい面積の断片を集めたものであり、先の分割例はまさにそれである。そこで、この 6 つの例に対応する定積分の表現を次に示す。

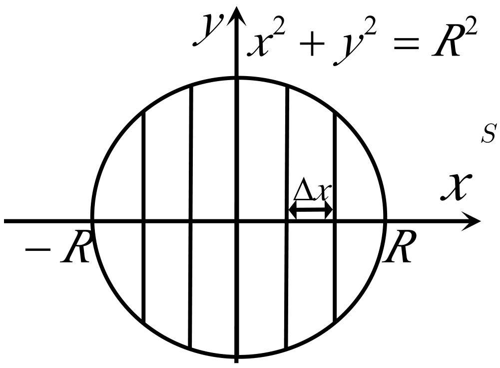
0.1　デカルト座標表示



$$S = \iint_{x^2+y^2 \le R^2} dxdy$$

図 7: xy 軸方向

上の図において、一つの小長方形の面積が $\Delta x \Delta y$ になっている．

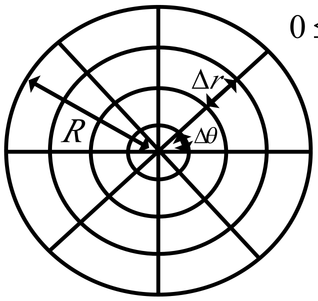


$$\begin{aligned} S &= \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} - (-\sqrt{R^2 - x^2})dx \\ &= \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - x^2}dx \\ &= 4\int_{0}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}dx \end{aligned}$$

図 8: x 軸方向

上の図において、一つの短冊状の部分の面積がほぼ $2\sqrt{R^2 - x^2}\Delta x$ になっている．なお、y 軸方向の和については、明らかなように、x 軸方向の和と同じ形で x と y を入れ替えたものになる．

0.2　極座標表示

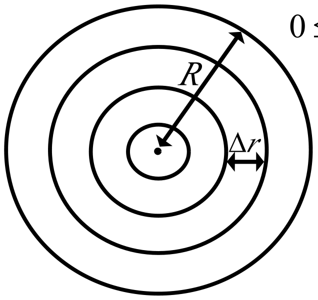


$r = R,$
$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$
\begin{aligned}
S &= \iint_{\substack{0\leq r\leq R,\\ 0\leq\theta\leq 2\pi}} r dr d\theta \\
&= \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta
\end{aligned}
$$

　左の図において、一つの小バームクーヘン状の部分の面積がほぼ $r\Delta\theta\Delta\mathrm{r}$ になっている．

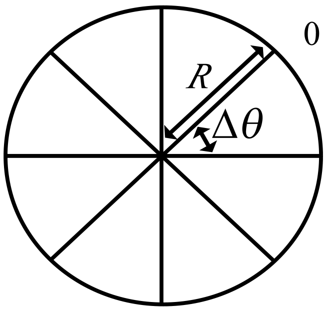
図 9: $r\theta$ 軸方向



$r = R,$
$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^R 2\pi r dr \\
&= \left[\pi r^2\right]_0^R \\
&= \pi R^2
\end{aligned}
$$

　左の図において、一つの小ドーナツ状の部分の面積がほぼ $2\pi r\Delta r$ になっている．



$r = R,$
$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}R^2 d\theta \\
&= \left[\frac{1}{2}R^2\theta\right]_0^{2\pi} \\
&= \pi R^2
\end{aligned}
$$

　上の図において、一つの小扇形の部分の面積が $\dfrac{1}{2}R^2\Delta\theta$ になっている．

図 11: θ 軸方向