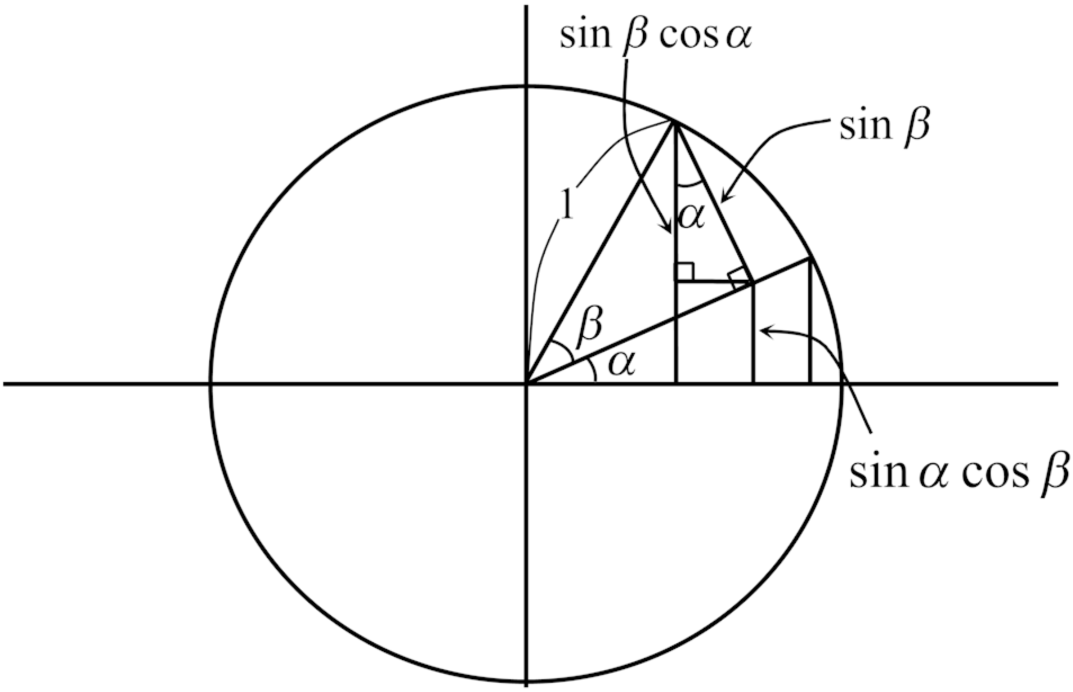
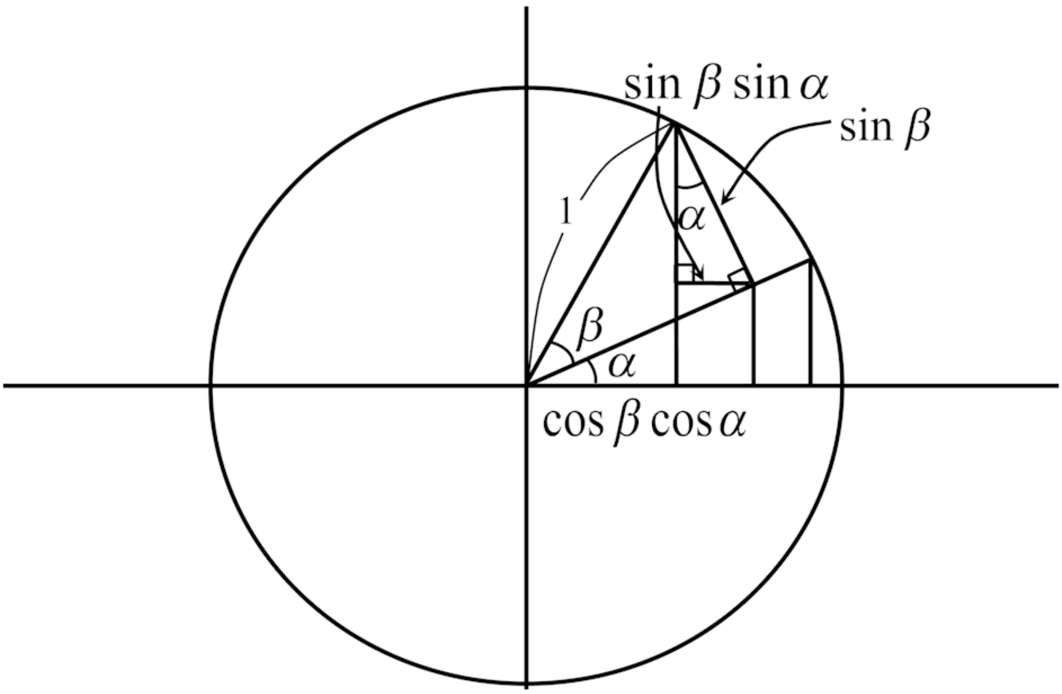
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ の証明



$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ の証明



$\sin$ と $\cos$ の加法定理の解析的証明 (おまけ)

まず，$\sin x$ と $\cos x$ を次のように定義する:

$$\sin x \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Im}(e^{ix}), \tag{1}$$

$$\cos x \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Re}(e^{ix}), \tag{2}$$

何故このように定義するのかと聞かれても，単に定義だからしょうがないと取り敢えず答えておく．但し，この定義によって決まる関数 $\sin x$ と $\cos x$ が直角三角形の斜辺と他の辺との比になるということは，この定義だけからでは直ぐにはいえない．つまりキチンと証明する必要があることは確かだ．因みに，この定義だと，x として実数しかとれない．解析関数としての $\sin z$ や $\cos z$ は正しくは，例えば Maclaurin 展開を用いて定義され，次の性質が任意の z に対して成り立つことと同値である:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \tag{3}$$

これは明らかに (1)，(2) の定義の一般化になっている．実際，$z \equiv x$ と z に特に実数 x を代入すると，

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(e^{ix}\right) = \cos x,\ \text{かつ}\ \mathrm{Im}\left(e^{ix}\right) = \sin x, \tag{4}$$

だからである．ここでは，高等学校でならう三角関数の加法定理との対比のために敢えて実数に対してのみの定義を用いたが，以下に記す証明の中の α, β を複素数とすれば，そのまま任意の複素数に対する，$\sin z$ と $\cos z$ の加法定理の証明になる (但し，実部と虚部をそのままとるのは無理)．以下証明:

$$e^{(\alpha+\beta)i} = e^{\alpha i} \cdot e^{\beta i} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

よってこれより，

$$\cos(\alpha+\beta) = \mathrm{Re}\left[e^{(\alpha+\beta)i}\right] = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \tag{5}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \mathrm{Im}\left[e^{(\alpha+\beta)i}\right] = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \tag{6}$$

が得られた．