0.0.1 ド・ジッター解が k の値によらず同じ時空を表すことの証明

ド・ジッター解は k の値の違いにより，計量の形が変わってしまうが，実はどれもド・ジッター時空と呼ばれる 1 つの時空の異なる座標による表示になっている．ここではそのことを確認しよう．

まず，ド・ジッター時空は実は 1 次元高い 5 次元ミンコフスキー時空

$$ds_5{}^2 = -dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2 + dW^2$$

のなかの擬球面

$$-T^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2 = \alpha^2 \tag{1}$$

として表される．このことを k の値別に確認してみよう．なお，全ての k で，

$$\bar{t} \equiv \frac{c}{\alpha} t$$

と置くことにする．

0.0.2 $k = 1$ の場合

$$\begin{aligned}
T &= \alpha \sinh \bar{t} \\
X &= \alpha \cosh \bar{t} \sin \chi \sin \theta \cos \phi \\
Y &= \alpha \cosh \bar{t} \sin \chi \sin \theta \sin \phi \\
Z &= \alpha \cosh \bar{t} \sin \chi \cos \theta \\
W &= \alpha \cosh \bar{t} \cos \chi
\end{aligned}$$

とすると，これは球面の球座標表示を拡張して考えれば分かる通り，擬球面 (1) 全体をカバーする．そこで，この座標の 5 次元世界間隔 ds_5 の 2 乗を求めてみよう．

$$
\begin{aligned}
dT =& \alpha \cosh \bar{t} d\bar{t} \\
dX' =& \alpha(\sinh \bar{t} \sin \chi \sin \theta \cos \phi d\bar{t} + \cosh \bar{t} \cos \chi \sin \theta \cos \phi d\chi \\
&+ \cosh \bar{t} \sin \chi \cos \theta \cos \phi d\theta - \cosh \bar{t} \sin \chi \sin \theta \sin \phi d\phi) \\
dY =& \alpha(\sinh \bar{t} \sin \chi \sin \theta \sin \phi d\bar{t} + \cosh \bar{t} \cos \chi \sin \theta \sin \phi d\chi \\
&+ \cosh \bar{t} \sin \chi \cos \theta \sin \phi d\theta + \cosh \bar{t} \sin \chi \sin \theta \cos \phi d\phi) \\
dZ =& \alpha(\sinh \bar{t} \sin \chi \cos \theta d\bar{t} + \cosh \bar{t} \cos \chi \cos \theta d\chi - \cosh \bar{t} \sin \chi \sin \theta d\theta) \\
dW =& \alpha(\sinh \bar{t} \cos \chi d\bar{t} - \cosh \bar{t} \sin \chi d\chi)
\end{aligned}
$$

より，

$$
\begin{aligned}
ds^2 =& -dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2 + dW^2 \\
=& -\alpha^2(\cosh \bar{t} d\bar{t})^2 \\
&+ \alpha^2(\sinh \bar{t} \sin \chi \sin \theta \cos \phi d\bar{t} + \cosh \bar{t} \cos \chi \sin \theta \cos \phi d\chi \\
&+ \cosh \bar{t} \sin \chi \cos \theta \cos \phi d\theta - \cosh \bar{t} \sin \chi \sin \theta \sin \phi d\phi)^2 \\
&+ \alpha^2(\sinh \bar{t} \sin \chi \sin \theta \sin \phi d\bar{t} + \cosh \bar{t} \cos \chi \sin \theta \sin \phi d\chi \\
&+ \cosh \bar{t} \sin \chi \cos \theta \sin \phi d\theta + \cosh \bar{t} \sin \chi \sin \theta \cos \phi d\phi)^2 \\
&+ \alpha^2(\sinh \bar{t} \sin \chi \cos \theta d\bar{t} + \cosh \bar{t} \cos \chi \cos \theta d\chi \\
&- \cosh \bar{t} \sin \chi \sin \theta d\theta)^2 \\
&+ \alpha^2(\sinh \bar{t} \cos \chi d\bar{t} - \cosh \bar{t} \sin \chi d\chi)^2 \\
=& \alpha^2[-d\bar{t}^2 + \cosh^2 \bar{t} d\chi^2 + \cosh^2 \bar{t} \sin^2 \chi d\theta^2 + \cosh^2 \bar{t} \sin^2 \chi \sin^2 \theta d\phi^2] \\
=& -c^2 dt^2 + \alpha^2 \cosh^2 \bar{t}[d\chi^2 + \sin^2 \chi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
2\text{ 次元単位球面の微小面積要素} =: d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2
$$

を導入すると，

$$
ds^2 = -c^2 dt^2 + \alpha^2 \cosh^2 \left(\frac{c}{\alpha} t\right) (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega_2^2)
$$

となり，これは $k = +1$ のときの解と一致する．

0.0.3 $k=0$ の場合

$k=0$ の場合のド・ジッター時空の計量,

$$ds^2 = -c^2dt^2 + \alpha^2 e^{2\frac{c}{\alpha}t}\left(d\chi^2 + \chi^2 d{\Omega_2}^2\right)$$

を満たす時空の座標として 5 次元ミンコフスキー時空内に,

$$\begin{aligned} T + W &= \alpha e^{\bar{t}} \\ X &= \alpha e^{\bar{t}}\chi\sin\theta\cos\phi \\ Y &= \alpha e^{\bar{t}}\chi\sin\theta\sin\phi \\ Z &= \alpha e^{\bar{t}}\chi\cos\theta \end{aligned} \tag{2}$$

がとれて，これらの条件を満たす座標 $(T,\ X,\ Y,\ Z,\ W)$ 上の点が 5 次元ミンコフスキー時空のなかの擬球面

$$-T^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2 = \alpha^2 \tag{3}$$

上にあることを示せば良い.

まず最初に，(2) を微分すると,

$$\begin{aligned} dT + dW &= \alpha e^{\bar{t}}d\bar{t} \\ dX &= \alpha e^{\bar{t}}\left[\sin\theta\cos\phi(\chi d\bar{t} + d\chi) + \chi\cos\theta\cos\phi d\theta - \chi\sin\theta\sin\phi d\phi\right] \\ dY &= \alpha e^{\bar{t}}\left[\sin\theta\sin\phi(\chi d\bar{t} + d\chi) + \chi\cos\theta\sin\phi d\theta + \chi\sin\theta\cos\phi d\phi\right] \\ dZ &= \alpha e^{\bar{t}}\left[\cos\theta(\chi d\bar{t} + d\chi) - \chi\sin\theta d\theta\right] \end{aligned}$$

となる．すると，

$$
\begin{aligned}
&dX^2+dY^2+dZ^2\\
=&\alpha^2e^{2\bar{t}}\left[\sin\theta\cos\phi(\chi d\bar{t}+d\chi)+\chi\cos\theta\cos\phi d\theta-\chi\sin\theta\sin\phi d\phi\right]^2\\
&+\alpha^2e^{2\bar{t}}\left[\sin\theta\sin\phi(\chi d\bar{t}+d\chi)+\chi\cos\theta\sin\phi d\theta+\chi\sin\theta\cos\phi d\phi\right]^2\\
&+\alpha^2e^{2\bar{t}}\left[\cos\theta(\chi d\bar{t}+d\chi)-\chi\sin\theta d\theta\right]^2\\
=&\alpha^2e^{2\bar{t}}\left[(\chi d\bar{t}+d\chi)^2+\chi^2d\theta^2+\chi^2\sin^2\theta d\phi^2\right]\\
=&\alpha^2e^{2\bar{t}}\chi^2d\bar{t}^2+2\alpha^2e^{2\bar{t}}\chi d\bar{t}d\chi+\alpha^2d\bar{t}^2-\alpha^2d\bar{t}^2+\alpha^2e^{2\bar{t}}(d\chi^2+\chi^2d\Omega_2^2)\\
=&\alpha^2e^{2\bar{t}}\chi^2d\bar{t}^2+2\alpha^2e^{2\bar{t}}\chi d\bar{t}d\chi+\alpha^2d\bar{t}^2\\
&-c^2dt^2+\alpha^2e^{2\frac{c}{\alpha}t}(d\chi^2+\chi^2d\Omega_2^2)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

が得られるが，T と W の条件，

$$
T+W=\alpha e^{\bar{t}} \tag{5}
$$

を満たしつつ，

$$
ds^2=-c^2dt^2+\alpha^2e^{2\frac{c}{\alpha}t}(d\chi^2+\chi^2d\Omega_2^2)
$$

となるというのが，求めたい条件であるので，式 (4) の最後の行は ds^2 で置き換わるべきである．したがって，5 次元ミンコフスキー時空の計量が，

$$
ds^2=-dT^2+dX^2+dY^2+dZ^2+dW^2
$$

であることより，

$$
\begin{aligned}
ds^2+dT^2-dW^2=&dX^2+dY^2+dZ^2\\
=&\alpha^2e^{2\bar{t}}\chi^2d\bar{t}^2+2\alpha^2e^{2\bar{t}}\chi d\bar{t}d\chi+\alpha^2d\bar{t}^2+ds^2
\end{aligned}
$$

が成り立つべきである．ここで，(5) より，

$$
dT+dW=\alpha e^{\bar{t}}d\bar{t}
$$

が成り立つことに注意すると，

$$\begin{aligned}
&\alpha^2 e^{2\bar{t}}\chi^2 d\bar{t}^2 + 2\alpha^2 e^{2\bar{t}}\chi d\bar{t}d\chi + \alpha^2 d\bar{t}^2 \\
=&dT^2 - dW^2 \\
=&(dT - dW)(dT + dW) = (dT - dW)\alpha e^{\bar{t}} d\bar{t}
\end{aligned}$$

より，この両辺を $\alpha e^{\bar{t}} d\bar{t}$ で割ってやると，

$$dT - dW = \alpha e^{\bar{t}}\chi^2 d\bar{t} + 2\alpha e^{\bar{t}}\chi d\chi + \alpha e^{-\bar{t}} d\bar{t}$$

が得られる．一方，

$$dT + dW = \alpha e^{\bar{t}}$$

だったから，これら 2 つの式の両辺を足して 2 で割ることにより，

$$dT = \alpha\left(\cosh\bar{t} + \frac{1}{2}e^{\bar{t}}\chi^2\right)d\bar{t} + \alpha e^{\bar{t}}\chi d\chi$$

が得られる．すると，全微分の公式より，

$$dT = \frac{\partial T}{\partial \bar{t}}d\bar{t} + \frac{\partial T}{\partial \chi}d\chi$$

が成り立つから，両者を見比べると，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \bar{t}} &= \alpha\left(\cosh\bar{t} + \frac{1}{2}e^{\bar{t}}\chi^2\right), \\
\frac{\partial T}{\partial \chi} &= \alpha e^{\bar{t}}\chi
\end{aligned}$$

が成り立つので，

$$T = \alpha\left(\sinh\bar{t} + \frac{1}{2}e^{\bar{t}}\chi^2\right)$$

を得る．この結果と，(5) により，

$$W = \alpha\left(\cosh\bar{t} - \frac{1}{2}e^{\bar{t}}\chi^2\right)$$

となる．以上により，　5 次元ミンコフスキー時空内の座標,

$$
\begin{aligned}
T &= \alpha\left(\sinh\bar{t} + \frac{1}{2}e^{\bar{t}}\chi^2\right) \\
X &= \alpha e^{\bar{t}}\chi\sin\theta\cos\phi \\
Y &= \alpha e^{\bar{t}}\chi\sin\theta\sin\phi \\
Z &= \alpha e^{\bar{t}}\chi\cos\theta \\
W &= \alpha\left(\cosh\bar{t} - \frac{1}{2}e^{\bar{t}}\chi^2\right)
\end{aligned}
$$

は，$k = 0$ の場合のド・ジッター時空のとなっているので，あとはこれが (3) を満たすことを示せれば，この座標変換が 5 次元ミンコフスキー空間の $k = 1$ の場合と同じ擬球面となっていることが言えることになる．計算してみると,

$$
\begin{aligned}
X^2 + Y^2 + Z^2 &= \alpha^2 e^{2\bar{t}}\chi^2 \\
W^2 - T^2 &= \alpha^2 - \alpha^2 e^{\bar{t}}\chi^2(\cosh\bar{t} + \sin\bar{t}) = \alpha^2 - \alpha^2 e^{2\bar{t}}\chi^2
\end{aligned}
$$

だから，これらを足すと,

$$
-T^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2 = \alpha^2
$$

が成り立つことが示せた.

0.0.4　$k = -1$ の場合

$$
\begin{aligned}
T &= \alpha\sinh\bar{t}\cosh\chi \\
X &= \alpha\sinh\bar{t}\sinh\chi\sin\theta\cos\phi \\
Y &= \alpha\sinh\bar{t}\sinh\chi\sin\theta\sin\phi \\
Z &= \alpha\sinh\bar{t}\sinh\chi\cos\theta \\
W &= \alpha\cosh\bar{t}
\end{aligned}
$$

とすると，容易に

$$-T^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2 = \alpha^2$$

を満たすことがわかる．そこで次にこれらを微分して，ds^2 を求めよう．

$$\begin{aligned}
dT =& \alpha(\cosh \bar{t} \cosh \chi d\bar{t} + \sinh \bar{t} \sinh \chi d\chi), \\
dX =& \alpha(\cosh \bar{t} \sinh \chi \sin\theta \cos\phi d\bar{t} + \sinh \bar{t} \cosh \chi \sin\theta \cos\phi d\chi \\
& + \sinh \bar{t} \sinh \chi \cos\theta \cos\phi d\theta - \sinh \bar{t} \sinh \chi \sin\theta \sin\phi d\phi) \\
dY =& \alpha(\cosh \bar{t} \sinh \chi \sin\theta \sin\phi d\bar{t} + \sinh \bar{t} \cosh \chi \sin\theta \sin\phi d\chi \\
& + \sinh \bar{t} \sinh \chi \cos\theta \sin\phi d\theta + \sinh \bar{t} \sinh \chi \sin\theta \cos\phi d\phi) \\
dZ =& \alpha(\cosh \bar{t} \sinh \chi \cos\theta d\bar{t} + \sinh \bar{t} \cosh \chi \cos\theta d\chi - \sinh \bar{t} \sinh \chi \sin\theta d\theta) \\
dW =& -\alpha \sinh \bar{t} d\bar{t}
\end{aligned}$$

であるので，

$$\begin{aligned}
ds^2 =& -dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2 + dW^2 \\
=& -\alpha^2(\cosh \bar{t} \cosh \chi d\bar{t} + \sinh \bar{t} \sinh \chi d\chi)^2 \\
& + \alpha^2(\cosh \bar{t} \sinh \chi \sin\theta \cos\phi d\bar{t} + \sinh \bar{t} \cosh \chi \sin\theta \cos\phi d\chi \\
& + \sinh \bar{t} \sinh \chi \cos\theta \cos\phi d\theta - \sinh \bar{t} \sinh \chi \sin\theta \sin\phi d\phi)^2 \\
& + \alpha^2(\cosh \bar{t} \sinh \chi \sin\theta \sin\phi d\bar{t} + \sinh \bar{t} \cosh \chi \sin\theta \sin\phi d\chi \\
& + \sinh \bar{t} \sinh \chi \cos\theta \sin\phi d\theta + \sinh \bar{t} \sinh \chi \sin\theta \cos\phi d\phi)^2 \\
& + \alpha^2(\cosh \bar{t} \sinh \chi \cos\theta d\bar{t} + \sinh \bar{t} \cosh \chi \cos\theta d\chi \\
& - \sinh \bar{t} \sinh \chi \sin\theta d\theta)^2 \\
& + \alpha^2 \sinh^2 \bar{t} d\bar{t}^2 \\
=& \alpha^2[-d\bar{t}^2 + \sinh^2 \bar{t} d\chi^2 + \sinh^2 \bar{t} \sinh^2 \chi d\theta^2 \\
& + \sinh^2 \bar{t} \sinh^2 \chi \sin^2\theta d\phi^2] \\
=& -c^2 dt^2 + \alpha^2 \sinh^2 \left(\frac{c}{\alpha} t\right) [d\chi^2 + \sinh^2 \chi d{\Omega_2}^2]
\end{aligned}$$

が得られる．よってこれより，

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \alpha^2 \sinh^2 \left(\frac{c}{\alpha} t\right) [d\chi^2 + \sinh^2 \chi d{\Omega_2}^2]$$

が成り立つことが示された．