0.1　アインシュタイン方程式のバリエーション

これまでで，アインシュタイン方程式の要素は宇宙定数を除いて全て求まったことになる．そこでここでもう一度アインシュタイン方程式を記そう．

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{1}$$

ただし，

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

であった．

さて，すでに説明したように，アインシュタイン方程式は，テンソル方程式であり，テンソル方程式は計量テンソルを掛けて縮約を取ることによって，様々な同値な式に変形できるのであった．これにより，アインシュタイン方程式も様々な異なる表現をした同値な式を持つことになり，状況によっては，表式 (1) を用いるより計算が楽になったりする場合もある．そこでここではいくつかのアインシュタイン方程式の同値なバリエーションをその特徴を含めて紹介しよう．

0.1.1　添字が 2 つとも下についたアインシュタイン方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{2}$$

この表式のアインシュタイン方程式は，教科書などで最も一般的に用いられる．その特徴はすでに述べたとおり，リッチテンソルが定義式通りの形でそのまま現れるため，通常は添字を上にとったものより計算手順が短くて済むという点である．

0.1.2　添字が 2 つとも上についたアインシュタイン方程式

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu} \tag{3}$$

この表式のアインシュタイン方程式も教科書などではよく用いられる．あまり際立った特徴は無いのであるが，強いて言えば右辺のエネルギー運動量テンソルが上付き添字のもので定義されるので，エネルギー運動量テンソルを定義式のまま使いたいときなどに便利かもしれない．例を挙げると，完全流体のエネルギー運動量テンソルは,

$$T^{\mu\nu} \overset{\mathrm{def}}{=} (\rho + p/c^2)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}$$

によって定義されるのであったが，これがエネルギー運動量テンソルの静止系では $u^\mu = (c, 0, 0, 0)$ と表されるため，この場合についてはエネルギー運動量テンソルが極めて簡単になるのに，これの下付き添字，すなわち，共変成分は,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p/c^2)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}$$

と表され，見た目は単純に添字を下げるだけで良さそうであるが，式の中に現れる u_μ は，$u_\mu = g_{\mu\sigma}u^\sigma$ によって定義されることより，計量が対角行列でない場合，特に複雑になってしまう．こういうときには，表式 (3) を用いるのも良いかもしれない．

0.1.3　添字がそれぞれ上下についたアインシュタイン方程式

式,

$$R_{\sigma\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\sigma\nu} + \Lambda g_{\sigma\nu} = \kappa T_{\sigma\nu} \tag{4}$$

の両辺に $g^{\mu\sigma}$ を掛けて縮約を取ると，

$$R^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{2}R\delta^{\mu}{}_{\nu} + \Lambda\delta^{\mu}{}_{\nu} = \kappa T^{\mu}{}_{\nu} \tag{5}$$

が得られる．この式は言うまでもなく，(4) 式に現れる計量が全てクロネッカーのデルタに置き換わっているため，状況によっては計算が簡単になることが想像できる．この表式のアインシュタイン方程式は，5 章で相対論的宇宙モデルを議論するときに現れるフリードマン方程式を導く際に用いることにしよう．

0.1.4　左辺にスカラー曲率を含まない形のアインシュタイン方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{6}$$

式の両辺に $g^{\mu\nu}$ を掛けて縮約を取ると，

$$左辺 = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R\delta^{\mu}{}_{\mu} + \Lambda\delta^{\mu}{}_{\mu} = R - \frac{1}{2}R\cdot 4 + 4\Lambda = -R + 4\Lambda \tag{7}$$

$$右辺 = \kappa g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = \kappa T$$

より，

$$R = 4\Lambda - \kappa T$$

を得る．そこでこれを，(6) に代入して整理すると，

$$R_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) \tag{8}$$

を得る．この表式のアインシュタイン方程式の特徴はスカラー曲率 R を求めなくて良い，という点にある．しかしその代償として，右辺に

$T \stackrel{\mathrm{def}}{=} g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ が現れてしまうため，エネルギー運動量テンソルが複雑な形の場合にはこの表式を用いるメリットはない．一方，例えば，宇宙の大部分の領域はほぼ真空であると考えられるが，真空な領域において，この式は力を発揮する．右辺の $T_{\mu\nu}$ も T もどちらもゼロになってしまうからである．このとき，アインシュタイン方程式は，

$$R_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \tag{9}$$

となる．真空な領域でしか使えないアインシュタイン方程式なんて，　ほとんど使い道がないんじゃないの？　と思った方は，ごく自然な感覚を持った方であろうが，まだ，一般相対論がよくわかっていない．この真空中のアインシュタイン方程式は，宇宙全体にエネルギーが全くない，したがって完全に平坦なミンコフスキー時空の場合にしか使えないのではなく，　天体の周りの真空な領域にも適用できるのである．このことは，**??**節で議論したように，Λ がゼロだとしても，$R_{\mu\nu} = 0$ なる時空がミンコフスキー時空のみに決定されないことからもわかるであろう．ここで通常宇宙論的スケールの場合を除き，ある天体の周囲の真空な領域などの比較的小さいスケールでは，宇宙定数の影響は非常に小さく，したがって，無視しても全く問題にならない．この場合のアインシュタイン方程式は，

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{10}$$

となり，非常にシンプルになる．実はアインシュタインは最初 $R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$ の形の式を想定していたらしいが，その理由はこの結果より明らかであろう．アインシュタインは特殊相対論を発表した後に一般相対論を発表したが，これと同様に，いきなり一般的なアインシュタイン方程式 (1) を発見したのではなく，最初は真空中のアインシュタイン方程式 (10) を先に見つけていたようなのである．この真空中のアインシュタイン方程式は，その見た目の易しさとは裏腹に，次節のバーコフの定理とシュヴァルツシルトの外部解を求めるのに力を発揮する．というのもどちらも天体の周囲の真空な領域での時空についての性質を表すものだからである．