0.1 アインシュタイン方程式の左辺

ここでは前節の最後に紹介した定理について証明する．なおこの定理の証明はやや難解であり，一般相対論の大枠の理解のためには必ずしも必要がないものとも思われるので，この定理の結果だけ理解しておけば，これから示す証明それ自体は飛ばしてしまっても差し支えないだろう．証明の細部が気になる方は是非ペンと紙をとってこの証明を確認することをおすすめする．リーマン幾何学の理解のための良い訓練となることと思う．

定理 0.1.1. $g_{\mu\nu}$，$g_{\mu\nu,\lambda}\left(\stackrel{\mathrm{def}}{=}\dfrac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\right)$，$g_{\mu\nu,\lambda\sigma}\left(\stackrel{\mathrm{def}}{=}\dfrac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda \partial x^\sigma}\right)$，だけから作られ，$g_{\mu\nu}$ の 2 階微分 $(= g_{\mu\nu,\lambda\sigma})$ については 1 次式となっているような，2 階対称テンソル $X^{\mu\nu}$ は，

$$X^{\mu\nu} = C_1 R^{\mu\nu} + C_2 g^{\mu\nu} R + C_3 g^{\mu\nu}$$

に限られる．特に，

$$\nabla_\nu X^{\mu\nu} = 0$$

ならば，

$$X^{\mu\nu} = C\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R + \Lambda g^{\mu\nu}\right)$$

に限られる．但し，C_1, C_2, C_3, C, Λ は任意の定数とする．

証明. まず最初に，時空内の一点 P において，局所ローレンツ系を選ぼう．するとこのとき，空間は局所的にミンコフスキー時空が選べるから，

$$g_{\mu\nu}(\mathrm{P}) = \eta_{\mu\nu}, \tag{1}$$

$$g_{\mu\nu,\lambda}(\mathrm{P}) = 0, \tag{2}$$

となるようにできる．これよりこの P 点における局所ローレンツ系において，これから示すこの定理の条件をみたすような対称テンソル $X_{\mu\nu}$ の点 P でのこの系での値には，次のような条件を満たすことになる:

1. $g_{\alpha\beta,\lambda}$ を含む項は (2) より全て 0 である.
2. $g_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ を含む項は 4 階のテンソルなので, 2 階分縮約した項は定理の条件を満たす. このとき, 縮約に使えるテンソルは $g^{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta,\lambda}$, $g^{\alpha\beta,\lambda\sigma}$ しかなく, しかもこのうち $g_{\alpha\beta}$ の 2 階微分に関しては 1 次式になっていることと, 条件 (2) より $g_{\alpha\beta,\lambda}(\mathrm{P})$ を含まないことより, 必然的に $g^{\alpha\beta}(\mathrm{P}) = \eta^{\alpha\beta}$ しか使えないことになる.
3. $g_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ は前 2 つの添字と後ろ 2 つの添字の入れ替えに対して対称性がある.
4. $g_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ を 4 階縮約して $\eta_{\mu\nu}$ をかけた項も定理の条件をみたすので使える.
5. 一方 1 階または 3 階添字を縮約しただけのものは, 当然帳尻が合わないので使えない.
6. $g_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ を含まない項は条件 (2) より, 必然的にテンソルとしては $\eta_{\mu\nu}$ のみからできている必要があるが, そのようなテンソルで μ と ν のみを添字に持つような対称テンソルは $\eta_{\mu\nu}$ の定数倍しかない.
7. $g_{\mu\alpha,\nu\beta}$ と $g_{\nu\alpha,\mu\beta}$ が $\eta^{\alpha\beta}$ で縮約された項は添字 μ と ν の対称テンソルになるために両方も同じ係数がかかってなければならない. つまり $C(g_{\mu\alpha,\nu\beta} + g_{\nu\alpha,\mu\beta})\eta^{\alpha\beta}$ の形で現れなければならない.

これらの条件より, 全部で $4! = 24$ 個ある $g_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ の添字の順序は, 条件 3 より $\dfrac{4!}{2!2!} = 6$ 通りの代表で表せることになる. その代表は例えば,

$$g_{\alpha\beta,\mu\nu}, \tag{3}$$

$$g_{\mu\nu,\alpha\beta}, \tag{4}$$

$$g_{\alpha\mu,\beta\nu}, \tag{5}$$

$$g_{\beta\mu,\alpha\nu}, \tag{6}$$

$$g_{\alpha\nu,\beta\mu}, \tag{7}$$

$$g_{\beta\nu,\alpha\mu} \tag{8}$$

のように選べる. ここで条件 2 より, 2 階分縮約を取る場合に使えるのは

$\eta^{\alpha\beta}$ だけであるが，α と β 両方で縮約を取る場合，添字を逆にしても同じ縮約になるから，(6) は (5) にまとめられる．また同様に (8) も (7) にまとめられるから，必要な式は，(3)，(4)，(5)，(7) に任意係数と $\eta^{\alpha\beta}$ をかけたものが，条件 2 に関する項になる．このうち，さらに，$X_{\mu\nu}$ が対称テンソルであるという条件から，(5) と (7) の係数は同じでなければならない．以上より，条件 2 に関する項は，

$$[Ag_{\alpha\beta,\mu\nu} + Bg_{\mu\nu,\alpha\beta} + C(g_{\alpha\mu,\beta\nu} + g_{\alpha\nu,\beta\mu})]\,\eta^{\alpha\beta} \tag{9}$$

という形が一般的な解を最も単純に表したものとなる．条件 4 に関する項は，$g_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ の 4 つの成分で全て縮約されるので，(9) の形,

$$[Ag_{\alpha\beta,\gamma\delta} + Bg_{\gamma\delta,\alpha\beta} + C(g_{\alpha\gamma,\beta\delta} + g_{\alpha\delta,\beta\gamma})]\eta^{\alpha\beta} \tag{10}$$

からさらに，$\eta^{\gamma\delta}$ で縮約をとってから $\eta_{\mu\nu}$ をかけるから，さらに，α, β での縮約と γ, δ での縮約の区別がいらないので，条件 4 に対応する項は結局,

$$\eta_{\mu\nu}(Dg_{\alpha\beta,\gamma\delta} + Eg_{\alpha\gamma,\beta\delta})\eta^{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta} \tag{11}$$

の形が一般性を保った最も単純な形となる．したがって条件 6 に対応する項まで全て含めたものは,

$$\begin{aligned} X_{\mu\nu}(\mathrm{P}) =& [Ag_{\alpha\beta,\mu\nu} + Bg_{\mu\nu,\alpha\beta} + C(g_{\alpha\mu,\beta\nu} + g_{\alpha\nu,\beta\mu})]\eta^{\alpha\beta} \\ &+ \eta_{\mu\nu}(Dg_{\alpha\beta,\gamma\delta} + Eg_{\alpha\gamma,\beta\delta})\eta^{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta} + F\eta_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{12}$$

という形が，一般性を保ったままでの最も単純な形となる．ただし,A, B, C, D, F は任意定数とする．

　この $X_{\mu\nu}$ は μ, ν に関して対称になるように作ったが，一般座標変換でテンソルとして変換するかどうかはまだわからない．そこで次のような特別な無限小の座標変換を考えよう:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} - \frac{1}{3!}a^{\mu}_{\alpha\beta\gamma}x^{\alpha}x^{\beta}x^{\gamma} + O((x)^4). \tag{13}$$

ただし，上の式で $a^{\mu}_{\alpha\beta\gamma}$ は無限小のパラメータで下付き添字に関して全対称とする．また，$(x)^4$ は $x^{\sigma}(\sigma=0,1,2,3)$ を 4 回掛けたものを表す．

この式を逆に解くにはまず，右辺 2 項目以降を左辺に移行すると，

$$x^{\mu}=x'^{\mu}+\frac{1}{3!}a^{\mu}_{\alpha\beta\gamma}x^{\alpha}x^{\beta}x^{\gamma}+O((x)^4) \tag{14}$$

が得られるので[*1]，この式の左辺の x^{μ} をそれぞれ $x^{\alpha}, x^{\beta}, x^{\gamma}$ に置き換えて (14) 式右辺の対象の項に代入すると，

$$\begin{aligned}
x^{\mu}&=x'^{\mu}+\frac{1}{3!}a^{\mu}_{\alpha\beta\gamma}x^{\alpha}x^{\beta}x^{\gamma}+O((x)^4)\\
&=x'^{\mu}+\frac{1}{3!}a^{\mu}_{\alpha\beta\gamma}\left[x'^{\alpha}+\frac{1}{3!}a^{\alpha}_{\rho\sigma\tau}x^{\rho}x^{\sigma}x^{\tau}+O((x)^4)\right]\\
&\qquad\qquad\qquad\left[x'^{\beta}+\frac{1}{3!}a^{\beta}_{\rho\sigma\tau}x^{\rho}x^{\sigma}x^{\tau}+O((x)^4)\right]\\
&\qquad\qquad\qquad\left[x'^{\gamma}+\frac{1}{3!}a^{\gamma}_{\rho\sigma\tau}x^{\rho}x^{\sigma}x^{\tau}+O((x)^4)\right]\quad+O((x)^4)\\
&=x'^{\mu}+\frac{1}{3!}a^{\mu}_{\alpha\beta\gamma}x'^{\alpha}x'^{\beta}x'^{\gamma}+O((x)^4)+O((x)^4)\\
&=x'^{\mu}+\frac{1}{3!}a^{\mu}_{\alpha\beta\gamma}x'^{\alpha}x'^{\beta}x'^{\gamma}+O((x')^4)
\end{aligned}$$

つまり逆に解くと，

$$x^{\mu}=x'^{\mu}+\frac{1}{3!}a^{\mu}_{\alpha\beta\gamma}x'^{\alpha}x'^{\beta}x'^{\gamma}+O((x')^4) \tag{15}$$

が成り立つ．これらの式より，この変換に対し，点 P （$x^{\mu}=0, x'^{\mu}=$

[*1] 言うまでもなくオーダー $O((x)^4)$ の符号を無視して良いことを用いている．

0, $\mu = 0, 1, 2, 3$）においては次の関係式が成り立つ:

$$\left.\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}\right|_{\mathrm{P}} = \delta^{\mu}_{\nu}, \tag{16}$$

$$\left.\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right|_{\mathrm{P}} = \delta^{\mu}_{\nu}, \tag{17}$$

$$\left.\frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}\partial x'^{\nu}}\right|_{\mathrm{P}} = 0, \tag{18}$$

$$\left.\frac{\partial^3 x^{\mu}}{\partial x'^{\tau}\partial x'^{\lambda}\partial x'^{\sigma}}\right|_{\mathrm{P}} = a^{\mu}_{\tau\lambda\sigma}. \tag{19}$$

このことを使うと，計量 $g_{\mu\nu}$ は 2 階の共変テンソルだから，

$$\left. g'_{\mu\nu}(x')\right|_{\mathrm{P}} = \left.\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} g_{\alpha\beta}(x)\right|_{\mathrm{P}} = \left.\delta^{\alpha}_{\mu}\delta^{\beta}_{\nu} g_{\alpha\beta}(x)\right|_{\mathrm{P}} = \left. g_{\mu\nu}(x)\right|_{\mathrm{P}} = \eta_{\mu\nu} \tag{20}$$

また，

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial g'_{\mu\nu}(x')}{\partial x'^{\lambda}}\right|_{\mathrm{P}} =& \left.\frac{\partial}{\partial x'^{\lambda}}\left[\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} g_{\alpha\beta}(x)\right]\right|_{\mathrm{P}} \\
=& \left.\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} g_{\alpha\beta}(x)\right|_{\mathrm{P}} + \left.\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}\partial x'^{\nu}} g_{\alpha\beta}(x)\right|_{\mathrm{P}} \\
&+ \left.\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial g_{\alpha\beta},(x)}{\partial x^{\sigma}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\lambda}}\right|_{\mathrm{P}} \\
=& 0
\end{aligned}$$

も成り立つので，局所ローレンツ系としての性質はこの座標変換で失われな

いことがわかる．一方，g の 2 階微分は，

$$
\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial^2 g'_{\mu\nu}(x')}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta}\right|_{\mathrm{P}} \\
=&\left.\frac{\partial^2}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta}\left[\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu}g_{\kappa\tau}\right]\right|_{\mathrm{P}} \\
=&\frac{\partial}{\partial x'^\alpha}\left[\frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial x'^\beta \partial x'^\mu}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu}g_{\kappa\tau}+\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\mu}\frac{\partial^2 x^\tau}{\partial x'^\beta \partial x'^\nu}g_{\kappa\tau}\right. \\
&\left.\left.+\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu}\frac{\partial g_{\kappa\tau}}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\beta}\right]\right|_{\mathrm{P}} \\
=&\left[\frac{\partial^3 x^\kappa}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta \partial x'^\mu}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu}g_{\kappa\tau}+\frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial x'^\beta \partial x'^\mu}\frac{\partial^2 x^\tau}{\partial x'^\alpha \partial x'^\nu}g_{\kappa\tau}\right. \\
&+\frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial x'^\beta \partial x'^\mu}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu}\frac{\partial g_{\kappa\tau}}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha}+\frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial x'^\alpha \partial x'^\mu}\frac{\partial^2 x^\tau}{\partial x'^\beta \partial x'^\nu}g_{\kappa\tau} \\
&+\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\mu}\frac{\partial^3 x^\tau}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta \partial x'^\nu}g_{\kappa\tau}+\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\mu}\frac{\partial^2 x^\tau}{\partial x'^\beta \partial x'^\nu}\frac{\partial g_{\kappa\tau}}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha} \\
&+\frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial x'^\alpha \partial x'^\mu}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu}\frac{\partial g_{\kappa\tau}}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\beta}+\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\mu}\frac{\partial^2 x^\tau}{\partial x'^\alpha \partial x'^\nu}\frac{\partial g_{\kappa\tau}}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\beta} \\
&\left.\left.+\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu}\frac{\partial^2 g_{\kappa\tau}}{\partial x^\sigma \partial x^\lambda}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\beta}+\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu}\frac{\partial g_{\kappa\tau}}{\partial x^\lambda}\frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta}\right]\right|_{\mathrm{P}} \\
=&a^\kappa_{\alpha\beta\mu}\delta^\tau_\nu g_{\kappa\tau}\Big|_{\mathrm{P}}+\delta^\kappa_\mu a^\tau_{\alpha\beta\nu}g_{\kappa\tau}\Big|_{\mathrm{P}}+\delta^\kappa_\mu\delta^\tau_\nu\left.\frac{\partial^2 g_{\kappa\tau}}{\partial x^\sigma \partial x^\lambda}\right|_{\mathrm{P}}\delta^\sigma_\alpha\delta^\lambda_\beta \\
=&a^\kappa_{\alpha\beta\mu}g_{\kappa\nu}\Big|_{\mathrm{P}}+a^\tau_{\alpha\beta\nu}g_{\mu\tau}\Big|_{\mathrm{P}}+\left.\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right|_{\mathrm{P}}
\end{aligned}
$$

だから，

$$
\left.\frac{\partial^2 g'_{\mu\nu}(x')}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta}\right|_{\mathrm{P}}=\left.\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right|_{\mathrm{P}}+\eta_{\kappa\nu}a^\kappa_{\alpha\beta\mu}+\eta_{\mu\tau}a^\tau_{\alpha\beta\nu} \tag{21}
$$

が成り立つ．これを用いると $X_{\mu\nu}(\mathrm{P})$ の変換後の値が,

$$
\begin{aligned}
&X'_{\mu\nu}(x')\Big|_{\mathrm{P}}\\
=&[Ag'_{\alpha\beta,\mu\nu}+Bg'_{\mu\nu,\alpha\beta}+C(g'_{\alpha\mu,\beta\nu}+g'_{\alpha\nu,\beta\mu})]\eta^{\alpha\beta}\\
&+\eta_{\mu\nu}(Dg'_{\alpha\beta,\gamma\delta}+Eg'_{\alpha\gamma,\beta\delta})\eta^{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta}+F\eta_{\mu\nu}\\
=&[A(g_{\alpha\beta,\mu\nu}+\eta_{\kappa\beta}a^{\kappa}_{\mu\nu\alpha}+\eta_{\alpha\tau}a^{\tau}_{\mu\nu\beta})\\
&+B(g_{\mu\nu,\alpha\beta}+\eta_{\kappa\nu}a^{\kappa}_{\alpha\beta\mu}+\eta_{\mu\tau}a^{\tau}_{\alpha\beta\nu})\\
&+C(g_{\alpha\mu,\beta\nu}+\eta_{\kappa\mu}a^{\kappa}_{\beta\nu\alpha}+\eta_{\alpha\tau}a^{\tau}_{\beta\nu\mu}+g_{\alpha\nu,\beta\mu}+\eta_{\kappa\nu}a^{\kappa}_{\beta\mu\alpha}+\eta_{\alpha\tau}a^{\tau}_{\beta\mu\nu})]\eta^{\alpha\beta}\\
&+\eta_{\mu\nu}[D(g_{\alpha\beta,\gamma\delta}+\eta_{\kappa\beta}a^{\kappa}_{\gamma\delta\alpha}+\eta_{\alpha\tau}a^{\tau}_{\gamma\delta\beta})\\
&+E(g_{\alpha\gamma,\beta\delta}+\eta_{\kappa\gamma}a^{\kappa}_{\beta\delta\alpha}+\eta_{\alpha\tau}a^{\tau}_{\beta\delta\gamma})]\eta^{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta}+F\eta_{\mu\nu}\\
=&X_{\mu\nu}(x)\Big|_{\mathrm{P}}\\
&+[A(\eta_{\kappa\beta}a^{\kappa}_{\mu\nu\alpha}+\eta_{\alpha\tau}a^{\tau}_{\mu\nu\beta})+B(\eta_{\kappa\nu}a^{\kappa}_{\alpha\beta\mu}+\eta_{\mu\tau}a^{\tau}_{\alpha\beta\nu})\\
&+C(\eta_{\kappa\mu}a^{\kappa}_{\beta\nu\alpha}+\eta_{\alpha\tau}a^{\tau}_{\beta\nu\mu}+\eta_{\kappa\nu}a^{\kappa}_{\beta\mu\alpha}+\eta_{\alpha\tau}a^{\tau}_{\beta\mu\nu})]\eta^{\alpha\beta}\\
&+\eta_{\mu\nu}[D(\eta_{\kappa\beta}a^{\kappa}_{\gamma\delta\alpha}+\eta_{\alpha\tau}a^{\tau}_{\gamma\delta\beta})+E(\eta_{\kappa\gamma}a^{\kappa}_{\beta\delta\alpha}+\eta_{\alpha\tau}a^{\tau}_{\beta\delta\gamma})]\eta^{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta}
\end{aligned}
$$

が得られるが，最後の式は，ダミー添字の入れ替え，$\eta_{\mu\nu}$ の添字の対称性, $a^{\mu}_{\alpha\beta\gamma}$ の下付き添字の対称性などにより，外側の $\eta^{\alpha\beta}$, $\eta^{\gamma\delta}$ なども含めて考え

れば,

$$
\begin{aligned}
&X_{\mu\nu}(x)\Big|_{\mathrm{P}} \\
&+[A(\underline{\eta_{\kappa\beta}a^{\kappa}_{\mu\nu\alpha}}+\underline{\eta_{\alpha\tau}a^{\tau}_{\mu\nu\beta}})+B(\overline{\eta_{\kappa\nu}a^{\kappa}_{\alpha\beta\mu}}+\overbrace{\eta_{\mu\tau}a^{\tau}_{\alpha\beta\nu}}) \\
&+C(\overbrace{\eta_{\kappa\mu}a^{\kappa}_{\beta\nu\alpha}}+\underline{\eta_{\alpha\tau}a^{\tau}_{\beta\nu\mu}}+\overline{\eta_{\kappa\nu}a^{\kappa}_{\beta\mu\alpha}}+\underline{\eta_{\alpha\tau}a^{\tau}_{\beta\mu\nu}})]\eta^{\alpha\beta} \\
&+\eta_{\mu\nu}[D(\underbrace{\eta_{\kappa\beta}a^{\kappa}_{\gamma\delta\alpha}}+\underbrace{\eta_{\alpha\tau}a^{\tau}_{\gamma\delta\beta}})+E(\underbrace{\eta_{\kappa\gamma}a^{\kappa}_{\beta\delta\alpha}}+\underbrace{\eta_{\alpha\tau}a^{\tau}_{\beta\delta\gamma}})]\eta^{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta} \\
=&X_{\mu\nu}(x)\Big|_{\mathrm{P}} \\
&+2(A+C)\eta_{\alpha\tau}a^{\tau}_{\mu\nu\beta}\eta^{\alpha\beta}+(B+C)(\eta_{\kappa\nu}a^{\kappa}_{\alpha\beta\mu}+\eta_{\mu\tau}a^{\tau}_{\alpha\beta\nu})\eta^{\alpha\beta} \\
&+2(D+E)\eta_{\kappa\beta}a^{\kappa}_{\gamma\delta\alpha}\eta^{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．一方 $X_{\mu\nu}$ はテンソルだから,

$$
X'_{\mu\nu}(x')\Big|_{\mathrm{P}}=\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}X_{\alpha\beta}(x)\Big|_{\mathrm{P}}=\delta^{\alpha}_{\mu}\delta^{\beta}_{\nu}X_{\alpha\beta}(x)\Big|_{\mathrm{P}}=X_{\mu\nu}(x)\Big|_{\mathrm{P}}
$$

が成り立つべきである．これより,

$$
A+C=0,\ B+C=0,\ D+E=0,
$$

でならなければならないから,

$$
A=B=-C,\ D=-E
$$

が成り立つべきである．これより，$X_{\mu\nu}$ はこの局所ローレンツ系から見ると，式 (12) により,

$$
\begin{aligned}
X_{\mu\nu}(\mathrm{P})=&A\eta^{\alpha\beta}(g_{\alpha\beta,\mu\nu}+g_{\mu\nu,\alpha\beta}-g_{\alpha\mu,\beta\nu}-g_{\alpha\nu,\beta\mu})\Big|_{\mathrm{P}} \\
&+D\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta}(g_{\alpha\beta,\gamma\delta}-g_{\alpha\gamma,\beta\delta})\Big|_{\mathrm{P}}+F\eta_{\mu\nu} \qquad (22)
\end{aligned}
$$

が成り立つことになる．ここでこの式がリッチテンソルやスカラー曲率で表せないかどうか考えてみよう．

まず，リッチテンソルの定義は，リーマンテンソルを用いて次のように表される:

$$R_{\mu\nu} = R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu} = \partial_\sigma \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} \tag{23}$$

ここで，接続係数は，計量を用いて

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\omega}\left(\frac{\partial g_{\omega\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\omega\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^{\omega}}\right) = \frac{1}{2}g^{\alpha\omega}(g_{\omega\beta,\gamma} + g_{\omega\gamma,\,\beta} - g_{\gamma\beta,\,\omega}) \tag{24}$$

と表さえるのでこれを (23) 式に代入すれば，リッチテンソルが計量で表現できたことになるのだが，そのまま代入するのは少々要領が悪い．我々が選んだ点 P での局所ローレンツ系では，計量の 1 階微分は全て 0 になってしまうのだったから，接続係数それ自体は微分しない限り点 P での我々の選んだ系で全て 0 になる．これを利用すると，

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu}\Big|_{\mathrm{P}} =& \partial_\sigma \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Big|_{\mathrm{P}} - \partial_\nu \Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma}\Big|_{\mathrm{P}} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\sigma}\Big|_{\mathrm{P}} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}\Big|_{\mathrm{P}} \\
=& \partial_\sigma \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Big|_{\mathrm{P}} - \partial_\nu \Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma}\Big|_{\mathrm{P}} \\
=& \partial_\sigma \left[\frac{1}{2}g^{\sigma\omega}\left(g_{\omega\mu,\nu} + g_{\omega\nu,\mu} - g_{\nu\mu,\omega}\right)\right]\Bigg|_{\mathrm{P}} \\
& - \partial_\nu \left[\frac{1}{2}g^{\sigma\omega}\left(g_{\omega\mu,\sigma} + g_{\omega\sigma,\mu} - g_{\sigma\mu,\omega}\right)\right]\Bigg|_{\mathrm{P}} \\
=& \left[\frac{1}{2}g^{\sigma\omega}\left(\cancel{g_{\omega\mu,\sigma\nu}} + g_{\omega\nu,\sigma\mu} - g_{\nu\mu,\sigma\omega}\right)\right]\Bigg|_{\mathrm{P}} \\
& - \left[\frac{1}{2}g^{\sigma\omega}\left(\cancel{g_{\omega\mu,\sigma\nu}} + g_{\omega\sigma,\mu\nu} - g_{\sigma\mu,\omega\nu}\right)\right]\Bigg|_{\mathrm{P}} \\
=& \left[\frac{1}{2}g^{\sigma\omega}\left(g_{\omega\nu,\sigma\mu} - g_{\nu\mu,\sigma\omega} - g_{\omega\sigma,\mu\nu} + g_{\sigma\mu,\omega\nu}\right)\right]\Bigg|_{\mathrm{P}} \\
=& \left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(g_{\beta\nu,\alpha\mu} - g_{\nu\mu,\alpha\beta} - g_{\beta\alpha,\mu\nu} + g_{\alpha\mu,\beta\nu}\right)\right]\Bigg|_{\mathrm{P}} \\
=& -\left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(g_{\alpha\beta,\mu\nu} + g_{\mu\nu,\alpha\beta} - g_{\alpha\mu,\beta\nu} - g_{\beta\nu,\alpha\mu}\right)\right]\Bigg|_{\mathrm{P}}
\end{aligned}$$

これより，

$$
\begin{aligned}
R_{\mu\nu}\Big|_{\mathrm{P}} &= -\left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(g_{\alpha\beta,\mu\nu}+g_{\mu\nu,\alpha\beta}-g_{\alpha\mu,\beta\nu}-g_{\beta\nu,\alpha\mu}\right)\right]\Big|_{\mathrm{P}} && (25)\\
&= -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\left(g_{\alpha\beta,\mu\nu}+g_{\mu\nu,\alpha\beta}-g_{\alpha\mu,\beta\nu}-g_{\alpha\nu,\beta\mu}\right)\Big|_{\mathrm{P}} && (26)
\end{aligned}
$$

また (26) より，

$$
\begin{aligned}
R\Big|_{\mathrm{P}} &= g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\Big|_{\mathrm{P}} && (27)\\
&= -\left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\left(g_{\alpha\beta,\mu\nu}+g_{\mu\nu,\alpha\beta}-g_{\alpha\mu,\beta\nu}-g_{\beta\nu,\alpha\mu}\right)\right]\Big|_{\mathrm{P}} && (28)\\
&= -\left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\left(2g_{\alpha\beta,\mu\nu}-2g_{\alpha\mu,\beta\nu}\right)\right]\Big|_{\mathrm{P}} && (29)\\
&= -\left[g^{\gamma\delta}g^{\alpha\beta}\left(g_{\alpha\beta,\gamma\delta}-g_{\alpha\gamma,\beta\delta}\right)\right]\Big|_{\mathrm{P}} && (30)
\end{aligned}
$$

だから，

$$
\begin{aligned}
R\Big|_{\mathrm{P}} &= -\left[g^{\gamma\delta}g^{\alpha\beta}\left(g_{\alpha\beta,\gamma\delta}-g_{\alpha\gamma,\beta\delta}\right)\right]\Big|_{\mathrm{P}} && (31)\\
&= -\eta^{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta}\left(g_{\alpha\beta,\gamma\delta}-g_{\alpha\gamma,\beta\delta}\right)\Big|_{\mathrm{P}} && (32)
\end{aligned}
$$

だから，この 2 つの関係式 (26)(32) を式 (22) に代入すると，

$$
X_{\mu\nu}(\mathrm{P}) = -2AR_{\mu\nu}(\mathrm{P}) - Dg_{\mu\nu}R(\mathrm{P}) + Fg_{\mu\nu}
$$

が得られる．ここでこの式は点 P で成り立つものだが，この式の両辺はテンソルで表されているから，ある 1 つの座標で成り立てば任意の座標系で成り立つ．また，A, D, F は任意定数だったから，

$$
X_{\mu\nu} = C_1R_{\mu\nu} + C_2g_{\mu\nu}R + C_3g_{\mu\nu}
$$

が一般に成り立つことが示せた．これは求めるテンソル $X^{\mu\nu}$ の共変成分である．特に,

$$\nabla_\nu \left[R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right] = 0$$

であり，計量条件として $\nabla_\nu g^{\mu\nu} = 0$ が成り立つのだったから，条件, $\nabla_\nu X^{\mu\nu} = 0$ を付け加えると,

アインシュタイン方程式の左辺の形

$$X^{\mu\nu} = C \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R + \Lambda g^{\mu\nu} \right)$$

の形に限られることがわかる．ただし C, Λ は任意定数である． □