0.1　接続係数の変換について

接続係数は，一見するとテンソルのようにみえるかもしれないが，実はテンソルではない．

定義 0.1.1 (偽テンソルの定義)**.** テンソルのように上下に添字があってもテンソルの変換則にしたがわないものを偽テンソルと呼ぶ．

接続係数はテンソルの変換にしたがわないので，偽テンソルである．それではどのような変換にしたがうのであろうか？それを次に述べる．

定理 0.1.2 (接続係数の変換)**.** *接続係数 $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ は次の変換にしたがう:*

$$\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}} \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\gamma'}} \tag{1}$$

なお，対称性がはっきりするようにするために，

$$T'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} T^{\alpha} \tag{2}$$

などとする代わりに，

$$T^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} T^{\mu} \tag{3}$$

などとする記法を用いた．

2

証明. 証明には次の事実を用いる:

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{i}) \cdots \nabla_\gamma \boldsymbol{e}_\beta = \mathit{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} \boldsymbol{e}_\alpha \\
&(\mathrm{ii}) \cdots \nabla_{\gamma'} = \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}} \nabla_\gamma \\
&(\mathrm{iii}) \cdots \boldsymbol{e}_{\beta'} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \boldsymbol{e}_\beta \\
&(\mathrm{iv}) \cdots \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} = \frac{\partial}{\partial x^{\gamma'}} \\
&(\mathrm{v}) \cdots \boldsymbol{e}_\alpha = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \boldsymbol{e}_{\alpha'}.
\end{aligned}
$$

これらを用いると，次のように式変形できる:

$$
\begin{aligned}
\mathit{\Gamma}^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} \boldsymbol{e}_{\alpha'} &= \nabla_{\gamma'} \boldsymbol{e}_{\beta'} && (\because (\mathrm{i})) \\
&= \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}} \nabla_\gamma \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \boldsymbol{e}_\beta \right) && (\because (\mathrm{ii}),\ (\mathrm{iii})) \\
&= \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \right) \boldsymbol{e}_\beta + \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \nabla_\gamma \boldsymbol{e}_\beta \\
&= \frac{\partial}{\partial x^{\gamma'}} \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \right) \boldsymbol{e}_\beta + \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \mathit{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} \boldsymbol{e}_\alpha && (\because (\mathrm{i}),\ (\mathrm{iv})) \\
&= \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\gamma'}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} \boldsymbol{e}_{\alpha'} + \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \mathit{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \boldsymbol{e}_{\alpha'} && (\because (\mathrm{v})) \\
&= \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}} \mathit{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} \boldsymbol{e}_{\alpha'} + \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\gamma'}} \boldsymbol{e}_{\alpha'} \\
&= \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}} \mathit{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} + \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\gamma'}} \right) \boldsymbol{e}_{\alpha'}.
\end{aligned}
$$

この式の両辺は α' で和をとっているが，$\{\boldsymbol{e}_\alpha\}$ たちは線形独立なので，

$$
\mathit{\Gamma}^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}} \mathit{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} + \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\gamma'}} \tag{4}
$$

が得られた. $\square$