球対称で静的な時空の不変間隔の導出

この項では，アインシュタイン方程式のシュヴァルツシルト解を求める際に必要となる球対称時空の線素を求める．これは物質の分布が球対称で時間変化しないというかなり特殊な条件下での時空で，電荷や角運動量などは一切ないものとする．

まず，一般の座標 (x^0, x^1, x^2, x^3) における線素の定義は次の通りとなる:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

ただし，$g_{\mu\nu}$ はその座標での計量を表す．ここで今，表題の通りの時空を表すものとして次の条件を課そう．

条件 1 球対称

条件 2 静的で時間変化しない

この条件を考えるにあたり，条件 1 の対称性を使うためには極座標をとることが最も簡単である．即ち，$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (w, r, \theta, \varphi)$（ただし，$w = ct$）ととればよいわけだが，これだと今まで直交座標で同じ記号を使っていたので感覚的にイメージが掴みづらいかもしれない．そこで単なる記号法として，例えば $g_{12} = g_{r\theta}$ などと表記する事にする．まず，具体的に無限小線素 ds をこの座標で表した場合を見ながら計量がどうなるか，分析していこう．

$$\begin{aligned}
ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\
&= g_{ww} dw^2 + g_{rr} dr^2 + g_{\theta\theta} d\theta^2 + g_{\varphi\varphi} d\varphi^2 + 2g_{r\theta} dr d\theta + 2g_{\theta\varphi} d\theta d\varphi + 2g_{\varphi r} d\varphi dr + 2g_{wr} dw dr + 2g_{w\theta} dw d\theta + 2g_{w\varphi} dw d\varphi
\end{aligned}$$

と表されるわけだが，上の式の中で球対称だから角度 θ や φ が含まれる項が全て 0 であるとしてしまってよいだろう，とするのが，最も単純な間違いである．というのも，θ や φ を含む項が複数組み合わされば，ひょっとしたら角度に依存しない r だけの関数になるというケースが考えられるからである．それではそのようなものは一体どのような形をしているのであろうか？ 球対称時空において角度 θ と φ を自由に動かしても一定となる条件が唯一つある．それは言うまでも無く同じ球面上にある場合である．これは言い換えると $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ において r が一定の場合である．そこでまずこの条件から得られる”考慮すべき”項を求めてみよう．まず，極座標変換は次のようなものである:

$$\begin{aligned}
x &= r \sin\theta \cos\varphi, \\
y &= r \sin\theta \sin\varphi, \\
z &= r \cos\theta,
\end{aligned}$$

これより，全微分は,

$$\begin{aligned}
dx &= \sin\theta \cos\varphi dr + r \cos\theta \cos\varphi d\theta - r \sin\theta \sin\varphi d\varphi, \\
dy &= \sin\theta \sin\varphi dr + r \cos\theta \sin\varphi d\theta + r \sin\theta \cos\varphi d\varphi, \\
dz &= \cos\theta dr - r \sin\theta d\theta,
\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
dx^2 &= \sin^2\theta \cos^2\varphi dr^2 + r^2 \cos^2\theta \cos^2\varphi d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi d\varphi^2 \\
&\quad + \cancel{2r \sin\theta \cos\theta \cos^2\varphi dr d\theta} - \cancel{2r \sin^2\theta \sin\varphi \cos\varphi dr d\varphi} - \cancel{2r^2 \sin\theta \cos\theta \sin\varphi \cos\varphi d\theta d\varphi}, \\
dy^2 &= \sin^2\theta \sin^2\varphi dr^2 + r^2 \cos^2\theta \sin^2\varphi d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi d\varphi^2 \\
&\quad + \cancel{2r \sin\theta \cos\theta \sin^2\varphi dr d\theta} + \cancel{2r \sin^2\theta \sin\varphi \cos\varphi dr d\varphi} + \cancel{2r^2 \sin\theta \cos\theta \sin\varphi \cos\varphi d\theta d\varphi}, \\
dz^2 &= \cos^2\theta dr^2 + r^2 \sin^2\theta d\theta^2 - \cancel{2r \sin\theta \cos\theta dr d\theta}
\end{aligned}$$

となることより，

$$\begin{aligned}\therefore (dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2 &= dx^2+dy^2+dz^2 \\ &= dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2\end{aligned}$$

が得られる．ここで，この点の移動 $(x,y,z)\to(x+\delta x,y+\delta y,z+\delta z)$ が同じ球面上の移動であると仮定すると，$\delta r=0$ となる．従って，球面上の微小距離 $\delta\ell$ を $\delta\ell^2=\delta x^2+\delta y^2+\delta z^2$ によって定義すると，

$$\delta\ell^2=r^2\delta\theta^2+r^2\sin^2\theta\delta\varphi^2$$

が成り立つことが分かる．この式の左辺は微小距離 $\delta\ell$ の長さについては指定しているが向きについては指定していない．つまり微小角度 $\delta\theta$ と $\delta\varphi$ の取り方によらず成り立つ式である．これはつまり，

$$d\ell=r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2$$

が r だけの関数である事を示している．これが，角 θ や φ を含む唯一の項であり，$d\theta$ や $d\varphi$．はこの形がセットになって現れるだけである．これは，別の見方をすれば，立体角を表す項であるともいえる．実際，半径 $d\ell$ の円が r 離れたところにあるとすると，立体角の定義より，

$$\frac{S}{r^2}=\frac{\pi d\ell^2}{r^2}=\pi\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

を得る．以上より，$d\theta d\varphi$，$dwd\theta$，$dwd\varphi$，$drd\theta$，$drd\varphi$ を含む項の係数は全て 0 としてよい．実際，$\theta'=-\theta$ という角度の反転に対して球対称であることより ds 及び $d\ell$ が不変となるから，$g_{w\theta}=g_{r\theta}=0$ が得られる．φ についても同様である．また計量が静的で時間変化しないという条件 2 は，空間が球対称であるという条件 1 とよく似ていてこれも時間反転 $t'=-t$ に対して対称である．この操作により $g_{wr}=0$ が得られる．これらの反転の操作をどのように行うのかを具体的に時間 t についての場合を示そう．

今，2 点 (w,r,θ,φ) 及び $(w+\delta w,r+\delta r,\theta,\varphi)$ について線素 ds を考える．すると，$dw=\delta w$，$dr=\delta r$，$d\theta=d\varphi=0$ だから，

$$ds^2=g_{ww}(r)\delta w^2+g_{rr}(r)\delta r^2+2g_{wr}(r)\delta w\delta r$$

となる．ここで，$\delta w=c\delta t$ である．一方 2 点 $(-w,r,\theta,\varphi)$ 及び $(-w-\delta w,r+\delta r,\theta,\varphi)$ について線素 ds を考えると，$dw=-\delta w$，$dr=\delta r$，$d\theta=d\varphi=0$ だから，

$$ds^2=g_{ww}(r)\delta w^2+g_{rr}(r)\delta r^2-2g_{wr}(r)\delta w\delta r$$

であるが，今空間が静的で時間変化しないという条件より,$w'=ct'=-ct=-w$ という時間反転に対して，この両者は一致するはずである．従って $g_{wr}=0$ を得る．以上より線素 ds は次の形で表される事が分かった．

$$\begin{aligned}ds^2 &= g_{ww}dw^2+g_{rr}dr^2+g_{\theta\theta}d\theta^2+g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 &(1)\\ &= -A(r)dw^2+B(r)dr^2+C(r)\left(r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2\right) &(2)\end{aligned}$$

なお，g_{ww} 及び g_{rr} が単独で球対称，かつ時間変化しないことよりそれぞれが r だけの関数となることを用いた．また g_{ww} が負となるように置いたのは先ほどの計算結果を利用し，ミンコフスキー時空を極座標で表すと，

$$ds^2=-dw^2+dx^2+dy^2+dz^2=-dw^2+dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2$$

となり，これは平坦な時空であるミンコフスキー時空の極座標表示では，$g_{ww}=-1$ となることから時空がよっぽどおかしな曲がり方をしていない限り，この係数は負になるから予めマイナスを付けておくほうが便利だからであるが，一般的には $A(r)$ の値が負になってその結果この項 $g_{ww}=-A(r)$ が正になる可能性も考慮すべきであろう．つまり，　一応 $A(r)$ としてそのように選べる置き換えをした方が良いかもしれない．

さて，通常の極座標での表現はこの辺が限界であるが，(1) は適当な座標変換でもっと簡単になる．まず最初に，$R\equiv\sqrt{C(r)}r$ と置こう．こう置く事により，未知の係数 $C(r)$ を無くす事が出来そうだからである．一般相対論は，一般と頭に付くように，一般座標変換に対して共変となるように組み立てられている．つまり，アインシュタイン方程式に用いる座標としてどのような座標系を用いてもかまわない．ただし当然ではあるが，その計量は共変なので決まった座標変換をしないといけない．今，$g_{\mu\nu}$ を座標系 $\boldsymbol{x}=(x^0,x^1,x^2,x^3)$ の計量とし，$\bar{g}_{\mu'\nu'}$ を座標系 $\boldsymbol{X}=(X^0,X^1,X^2,X^3)$ の計量を表すものとする．すると $g_{\mu\nu}$ は 2 階の共変テンソルだから，

$$\bar{g}_{\mu'\nu'}(\boldsymbol{X}) = \frac{\partial x^\mu}{\partial X^{\mu'}}\frac{\partial x^\nu}{\partial X^{\nu'}}g_{\mu\nu}(\boldsymbol{x})$$

という座標変換をするのであった．そこで特に $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (w, r, \theta, \varphi)$，$(X^0, X^1, X^2, X^3) = (w, R, \theta, \varphi)$ として，この座標変換を行うと，

$$\begin{aligned}
&\bar{g}_{ww}(\boldsymbol{X}) = \bar{g}_{00}(\boldsymbol{X}) = \frac{\partial x^\mu}{\partial X^0}\frac{\partial x^\nu}{\partial X^0}g_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial x^0}{\partial X^0}\frac{\partial x^0}{\partial X^0}g_{00}(\boldsymbol{x}) = g_{00}(\boldsymbol{x}) = g_{ww}(\boldsymbol{x}) \\
&\bar{g}_{RR}(\boldsymbol{X}) = \bar{g}_{11}(\boldsymbol{X}) = \frac{\partial x^\mu}{\partial X^1}\frac{\partial x^\nu}{\partial X^1}g_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial x^1}{\partial X^1}\frac{\partial x^1}{\partial X^1}g_{11}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial r}{\partial R}\frac{\partial r}{\partial R}g_{rr}(r) = g_{rr}(\boldsymbol{x})\left(\frac{\partial r}{\partial R}\right)^2 \\
&\bar{g}_{\theta\theta}(\boldsymbol{X}) = \bar{g}_{22}(\boldsymbol{X}) = \frac{\partial x^\mu}{\partial X^2}\frac{\partial x^\nu}{\partial X^2}g_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial x^2}{\partial X^2}\frac{\partial x^2}{\partial X^2}g_{22}(\boldsymbol{x}) = g_{22}(\boldsymbol{x}) = g_{\theta\theta}(\boldsymbol{x}) \\
&\bar{g}_{\varphi\varphi}(\boldsymbol{x}) = \bar{g}_{33}(\boldsymbol{X}) = \frac{\partial x^\mu}{\partial X^3}\frac{\partial x^\nu}{\partial X^3}g_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial x^3}{\partial X^3}\frac{\partial x^3}{\partial X^3}g_{33}(\boldsymbol{x}) = g_{33}(\boldsymbol{x}) = g_{\varphi\varphi}(\boldsymbol{x}) \\
&\therefore\quad g_{ww}(\boldsymbol{x}) = \bar{g}_{ww}(\boldsymbol{X}),\quad g_{rr}(\boldsymbol{x})dr^2 = \bar{g}_{RR}(\boldsymbol{X})dR^2,\quad g_{\theta\theta}(\boldsymbol{x}) = \bar{g}_{\theta\theta}(\boldsymbol{X}),\quad g_{\varphi\varphi}(\boldsymbol{x}) = \bar{g}_{\varphi\varphi}(\boldsymbol{X}),
\end{aligned}$$

を得る．よってこれより，

$$\begin{aligned}
&-A(r)dw^2 = g_{ww}(\boldsymbol{x})dw^2 = \bar{g}_{ww}(\boldsymbol{X})dw^2, \\
&B(r)dr^2 = g_{rr}(\boldsymbol{x})dr^2 = \bar{g}_{RR}(\boldsymbol{X})dR^2, \\
&R^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) = C(r)r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \\
&\qquad = C(r)r^2d\theta^2 + C(r)r^2d\varphi^2 \\
&\qquad = g_{\theta\theta}(\boldsymbol{x})d\theta^2 + g_{\varphi\varphi}(\boldsymbol{x})d\varphi^2 \\
&\qquad = \bar{g}_{\theta\theta}(\boldsymbol{X})d\theta^2 + \bar{g}_{\varphi\varphi}(\boldsymbol{X})d\varphi^2
\end{aligned}$$

を得るが，$R = \sqrt{C(r)}r$ より座標系 $\boldsymbol{X} = (ct, R, \theta, \varphi)$ は動径方向に伸び縮みしただけだから線素 ds の表現も変わらず，

$$ds^2 = \bar{g}_{ww}(\boldsymbol{X})dw^2 + \bar{g}_{RR}(\boldsymbol{X})dR^2 + \bar{g}_{\theta\theta}(\boldsymbol{X})d\theta^2 + \bar{g}_{\varphi\varphi}(\boldsymbol{X})d\varphi^2$$

と表される．従って，

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \bar{g}_{ww}(\boldsymbol{X})dw^2 + \bar{g}_{RR}(\boldsymbol{X})dR^2 + \bar{g}_{\theta\theta}(\boldsymbol{X})d\theta^2 + \bar{g}_{\varphi\varphi}(\boldsymbol{X})d\varphi^2 \\
&= -A(r)dw^2 + B(r)dR^2 + R^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)
\end{aligned}$$

となるので $R = \sqrt{C(r)}r$ の関係式を用いて改めて，$e^{\nu(R)} \equiv A(r)$，$e^{\mu(R)} \equiv B(r)$ と置けば，

$$ds^2 = -e^{\nu(R)}dw^2 + e^{\mu(R)}dR^2 + R^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

と表される事になる．これが，球対称で時間変化しない時空の不変距離 ds を表す一般式である．最後の置き換えについては，計算を簡単にするための技巧的なもので，この後に続くシュヴァルツシルトの厳密解を求めるときに威力を発揮するであろう．