シュヴァルツシルトの厳密解の導出 (2)

アインシュタインテンソルまで求まったところで，いよいよシュヴァルツシルトの厳密解を求めてみよう．

物質の分布状況について

まず，アインシュタイン方程式は，

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

であった．ここで宇宙項 $\Lambda g_{\mu\nu}$ が現れるが，この項は宇宙全体の挙動などを調べるときには重要な役割を果たすが，通常の恒星の作る重力場やブラックホールなどを考える際には充分小さい事がはっきりしているので無視してよい．すると左辺はアインシュタインテンソル $G_{\mu\nu}$ のみとなるので，球対称時空ではアインシュタインテンソルが対角成分のみとなるから，

$$G_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00},\ G_{11} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{11},\ G_{22} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{22},\ G_{33} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{33},$$

ただし，

$$\begin{aligned}
G_{00} &= \frac{e^\nu}{r^2} \left\{ 1 - e^{-\lambda} \left(1 - r\frac{d\lambda}{dr} \right) \right\} \\
G_{11} &= -\frac{e^\lambda}{r^2} \left\{ 1 - e^{-\lambda} \left(1 + r\frac{d\nu}{dr} \right) \right\} \\
G_{22} &= \frac{r^2 e^{-\lambda}}{2} \left\{ \frac{d^2\nu}{dr^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{d\nu}{dr} \frac{d\lambda}{dr} - \frac{1}{r} \left(\frac{d\lambda}{dr} - \frac{d\nu}{dr} \right) \right\} \\
G_{33} &= G_{22} \sin^2\theta \\
G_{\mu\nu} &= 0 \qquad (\mu \neq \nu)
\end{aligned}$$

を解けばよいことになるが，式に現れるエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ は一般に複雑で簡単には解けそうにない．これでもし右辺の $T_{\mu\nu}$ が全て 0 だったらかなり計算は楽になるが，$T_{\mu\nu} = 0$ というのは物質やエネルギーの分布が全く無い完全な真空状態を表すことになるのだから，一見すると全く面白みの無いつまらない状況のように思える．しかし，この直感は部分的にしか正しくない．アインシュタイン方程式が満たすべき条件のところで触れたように，4 番目の条件として，$g_{\mu\nu}$ の自由度が 10 しかないので空間が完全に平坦であるための条件である $R^\mu_{\alpha\beta\gamma}$ が全て 0 である条件を満たさず，従って $T_{\mu\nu} = 0$ だからといって必ずしも空間が平坦だとは限らないことが分かる．要するに，アインシュタイン方程式は解を求める空間だけ $T_{\mu\nu} = 0$ であればそのまま右辺の $T_{\mu\nu} = 0$ として解いてよいということである．今回の話の場合，取り敢えず $T_{\mu\nu} = 0$ として計算が出来る簡単な場合を求めよう．いま物質分布が球対称なのだから，物質が中心に球状に集まっている場合や，卵の殻のように外側に分布している状況などが考えられる．しかし通常物質は互いの万有引力のため卵の殻のようになることはなく，中央に球状に集まる場合が圧倒的に多い．恒星やブラックホールなどがその例である．つまりここで考える物質は中央に集まっていると考えるのが，計算の都合上も有用性上もよいだろう．こうすると中央の物質が集まっているところの”外側”であれば真空なのだから物質分布が無いと考えてアインシュタイン方程式を解いても問題が無いことになる．こうして得られた解をその条件から外部解という．なお，実際の物質は互いの万有引力により中央に集まり収縮する場合が多いが，今回は物質分布が静的であるとして求めるため，そのような過渡状態についての解は得られないと考えるべきであろう．しかし後述するようにバーコフ (Birkhoff) の定理と呼ばれる定理により，例え物質分布が振動，収縮，膨張などの運動をしていてもそれが球対称であるかぎり，物質が分布しているそのそとの真空な領域では常に重力場は静的となることが示されている．

シュヴァルツシルトの外部解の導出

先に述べたように物質の分布が原点付近だけとしてアインシュタイン方程式を解こう．解くべき方程式は，

$$G_{00} = \frac{e^{\nu}}{r^2}\left\{1 - e^{-\lambda}\left(1 - r\frac{d\lambda}{dr}\right)\right\} = 0 \tag{1}$$

$$G_{11} = -\frac{e^{\lambda}}{r^2}\left\{1 - e^{-\lambda}\left(1 + r\frac{d\nu}{dr}\right)\right\} = 0 \tag{2}$$

$$G_{22} = \frac{r^2 e^{-\lambda}}{2}\left\{\frac{d^2\nu}{dr^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\nu}{dr}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{d\nu}{dr}\frac{d\lambda}{dr} - \frac{1}{r}\left(\frac{d\lambda}{dr} - \frac{d\nu}{dr}\right)\right\} = 0 \tag{3}$$

$$G_{33} = G_{22}\sin^2\theta = 0 \tag{4}$$

$$G_{\mu\nu} = 0 \qquad (\mu \neq \nu) \tag{5}$$

このうち，式 (4) は球対称だから角度 θ によらずに成り立つためには $G_{22} = 0$ でなくてはならずこれは (3) と同じ条件である． よって実質上独立な方程式は (1) から (3) までの 3 つとなるが，実はこのうち独立なのは 2 つに絞られる．というのも，アインシュタインテンソルは，ビアンキの恒等式より発散が 0 となる，つまり，

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$$

が成り立つわけだが，$G^{\mu\nu}$ は $G_{\mu\nu}$ が対角行列だから，$G^{\mu\mu} = \dfrac{1}{G_{\mu\mu}}$ となり $G^{\mu\nu}$ は対角成分が $G_{\mu\mu}$ の逆数で，それ以外は 0 となる対角行列となり，従って $G^{\mu\nu}$ の成分の独立性は $G_{\mu\nu}$ と一緒であるが，今,

$$\nabla_\mu G^{\mu\mu} = \nabla_0 G^{00} + \nabla_1 G^{11} + \nabla_2 G^{22} + \nabla_3 G^{33} = 0$$

の関係式が成り立っている事より，G^{00}，G^{11}，G^{22}，G^{33} 間の条件式が一つ増える事になり，よって一つの式の独立性が失われることになる． よって必要な独立成分は (1) と (2) のみとしてよい． これを先頭の係数で割ることにより，同値な

$$1 - e^{-\lambda}\left(1 - r\frac{d\lambda}{dr}\right) = 0 \tag{6}$$

$$1 - e^{-\lambda}\left(1 + r\frac{d\nu}{dr}\right) = 0 \tag{7}$$

が得られる．これを解こう．

まず，(6) より，

$$1 - e^{-\lambda}\left(1 - r\frac{d\lambda}{dr}\right) = \frac{d}{dr}\left\{r(1 - e^{-\lambda})\right\} = 0$$

従ってある定数 r_g により，

$$r(1 - e^{-\lambda}) = r_g$$
$$\therefore \quad e^{\lambda} = \frac{1}{1 - r_g/r}$$

となることが分かる．(なお，r_g は長さの次元なので r_g と置いた．後に半径に相当する事は述べる．)

次に (6) - (7) より，

$$e^{-\lambda}\left(r\frac{d\lambda}{dr} + r\frac{d\nu}{dr}\right) = 0$$
$$\therefore \quad \frac{d\lambda}{dr} + \frac{d\nu}{dr} = 0$$

だから，$\nu = -\lambda + C$(ただし C は積分定数) と表される事になるから，

$$e^{\nu} = e^{-\lambda + C} = C' e^{-\lambda} = C'(1 - r_g/r)$$

と表される事になる．(ただし，$C' = e^C$)

さて，球対称時空の不変間隔 ds は，

$$ds^2 = -e^{\nu(r)}dw^2 + e^{\lambda(r)}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

だったから,

$$ds^2 = -(1 - r_g/r)C'dw^2 + \frac{dr^2}{1 - r_g/r} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

が得られるが, C' は定数なので時間を測る間隔を変えてやれば,$dt' = C'dt$ として置き換えられる. よって,

$$ds^2 = -(1 - r_g/r)dw^2 + \frac{dr^2}{1 - r_g/r} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

が最終的に得られた解となる. これをシュヴァルツシルトの解と呼ぶ.

この解をよく見ると, $r \to \infty$ でミンコフスキー時空の極座標表示と一致する事が分かり, これは充分遠方では時空が平坦である事を示し, 物理的直感と矛盾しない.

シュヴァルツシルト半径

さて, シュヴァルツシルト解のなかで定数 r_g がまだ未定だった. これは充分弱い（そして静的な）重力場の場合, ニュートンの万有引力の法則を再現するとして決定されるべきである. 我々は既に, 弱い重力場におけるニュートン近似において,

$$g_{00} = \eta_{00} + h_{00} = -1 - \frac{2\phi_G}{c^2} \tag{8}$$

を得ている. 今 $g_{00} = -(1 - r_g/r)$ であるから, これより

$$r_g = -\frac{2r\phi_G}{c^2} \tag{9}$$

が成り立つはずである. ただしここで, 式 (8) が成り立つのが充分弱い重力場という条件があるため, 式 (9) において $r \gg r_g$ における近似であるということに注意が必要であろう. この近似において, 原点付近で球形に物質が均一に分布している場合の重力ポテンシャル ϕ_g は, 原点に質量 M の質点を置いた場合に出来る重力ポテンシャルに等しく,

$$\phi_g = -\frac{GM}{r}$$

となる. 従ってこれより,

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}$$

が得られる. この r_g をシュヴァルツシルト半径と呼ぶ.

ここで次の二つの状況が考えられる:

物質分布が半径 r_g より内側に限られる場合： このときシュヴァルツシルト解が適用できるのは物質分布のある外側全て, つまりシュヴァルツシルト半径 r_g の内側 (の物質分布が無い領域) まで対象となる. このときこの解は有名なブラックホール時空の解になる.

物質分布が半径 r_g より外側まで分布している場合： このとき解が適用できるのはシュヴァルツシルト半径 r_g より外側で物質分布が無い領域までであるが, このときはブラックホールにならない. 実際の宇宙における天体としては惑星, 恒星, 白色矮星, 中性子星など多数存在する. (ただし自転や電荷などは再現されていない)