シュヴァルツシルトの厳密解の導出

球対称で静的な時空の不変間隔は,

$$ds^2 = -e^{\nu(r)}dw^2 + e^{\lambda(r)}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2$$

で与えられる事を示した．これを用いてアインシュタイン方程式のシュヴァルツシルト解を求めてみよう．まず,不変間隔の式より,

$$g_{00} = -e^{\nu(r)},\ g_{11} = e^{\lambda(r)},\ g_{22} = r^2,\ g_{33} = r^2\sin^2\theta,\ g_{\alpha\beta} = 0\ (\alpha \neq \beta),$$
$$g^{00} = -e^{-\nu(r)},\ g^{11} = e^{-\lambda(r)},\ g^{22} = \frac{1}{r^2},\ g^{33} = \frac{1}{r^2\sin^2\theta},\ g^{\alpha\beta} = 0\ (\alpha \neq \beta),$$

となることが分かるのでこれを用いて,

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} \longrightarrow R_{\mu\nu} \longrightarrow G_{\mu\nu}$$

の順に求めていこう．

接続係数の計算

まず接続係数 $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ を求めてみよう．

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\omega}\Big(\partial_\gamma g_{\omega\beta} + \partial_\beta g_{\omega\gamma} - \partial_\omega g_{\gamma\beta}\Big)$$

であるが，今，$g^{\mu\nu}$ は対角成分以外は 0 だから，上の式において $\omega = \alpha$ 以外の項はみな消えてしまう．そこで α の値ごとに場合わけして考えよう．

$\alpha = 0$ のとき

$$\Gamma^{0}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{00}\Big(\partial_\gamma g_{0\beta} + \partial_\beta g_{0\gamma} - \partial_0 g_{\gamma\beta}\Big) = -\frac{1}{2}e^{-\nu(r)}\Big(\partial_\gamma g_{0\beta} + \partial_\beta g_{0\gamma}\Big)$$

であるが，対角成分以外 $g_{\mu\nu} = 0$ であるから，β か γ の少なくとも一方は 0 でないと $\Gamma^{0}_{\beta\gamma}$ は 0 になってしまう．叉 g_{00} は r のみの関数だから，r 以外で微分すると 0 になる．以上より 0 でない成分は,

$$\Gamma^{0}_{10} = \Gamma^{0}_{01} = -\frac{1}{2}e^{-\nu(r)}\left(-\frac{d\nu(r)}{dr}e^{\nu(r)}\right) = \frac{1}{2}\frac{d\nu(r)}{dr}$$

のみとなる．

$\alpha = 1$ のとき

$$\Gamma^{1}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{11}\Big(\partial_\gamma g_{1\beta} + \partial_\beta g_{1\gamma} - \partial_1 g_{\gamma\beta}\Big)$$

より，$\beta \neq \gamma$ のとき，第 3 項は 0 になる．またこのとき β と γ が両方同時に 1 になることは無いから，g_{11} が r だけの関数である事より，前の 2 項もともに 0 となる．従って $\Gamma^{1}_{\beta\gamma}$ が 0 以外の値をとるのは $\beta = \gamma$ のときに限られる．よって 0 でない成分は,

$$\begin{aligned}
\Gamma^{1}_{00} &= \frac{1}{2}g^{11}\Big(\partial_0 g_{10} + \partial_0 g_{10} - \partial_1 g_{00}\Big) = \frac{1}{2}g^{11}\Big(-\partial_1 g_{00}\Big) = \frac{1}{2}e^{-\lambda(r)}\left(\frac{d\nu(r)}{dr}e^{\nu(r)}\right) = \frac{1}{2}\frac{d\nu(r)}{dr}e^{\nu(r)-\lambda(r)} \\
\Gamma^{1}_{11} &= \frac{1}{2}g^{11}\Big(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}\Big) = \frac{1}{2}g^{11}\Big(\partial_1 g_{11}\Big) = \frac{1}{2}e^{-\lambda(r)}\left(\frac{d\lambda(r)}{dr}e^{\lambda(r)}\right) = \frac{1}{2}\frac{d\lambda(r)}{dr} \\
\Gamma^{1}_{22} &= \frac{1}{2}g^{11}\Big(\partial_2 g_{12} + \partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22}\Big) = \frac{1}{2}g^{11}\Big(-\partial_1 g_{22}\Big) = -\frac{1}{2}e^{-\lambda(r)}(2r) = -re^{-\lambda(r)} \\
\Gamma^{1}_{33} &= \frac{1}{2}g^{11}\Big(\partial_3 g_{13} + \partial_3 g_{13} - \partial_1 g_{33}\Big) = \frac{1}{2}g^{11}\Big(-\partial_1 g_{33}\Big) = \frac{1}{2}e^{-\lambda(r)}\left(-2r\sin^2\theta\right) = -r\sin^2\theta e^{-\lambda(r)}
\end{aligned}$$

となる．

$\alpha = 2$ のとき

$$\Gamma^2_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{22}\Big(\partial_\gamma g_{2\beta} + \partial_\beta g_{2\gamma} - \partial_2 g_{\gamma\beta}\Big)$$

より，$\beta \neq \gamma$ のとき，第 3 項は 0 になる． またこのとき g_{22} が r だけの関数であるから $(\beta,\gamma) = (1,2)$ か $(\beta,\gamma) = (2,1)$ 以外の場合は前の 2 項は全て 0 となる．よって $\beta \neq \gamma$ のとき 0 でない成分は,

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2}g^{22}\Big(\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{21} - \partial_2 g_{12}\Big) = \frac{1}{2}g^{22}\Big(\partial_1 g_{22}\Big) = \frac{1}{2r^2}(2r) = \frac{1}{r}$$

のみとなる． 一方，$\beta = \gamma$ のときは，第 3 項目に現れる $\partial_2 g_{\gamma\beta}$ は $x^2 = \theta$ より θ を含むのは g_{33} だけだから，$\beta = \gamma = 3$ 以外だと 0 になってしまう．また前の 2 項は $\beta = \gamma = 2$ 以外のときは，計量の対角成分で無いから 0 になってしまうが，2 だとしても，g_{22} は θ を含まないので結局 0 になってしまう．以上より，$\beta = \gamma$ のときは,

$$\Gamma^2_{33} = \Gamma^2_{33} = \frac{1}{2}g^{22}\Big(\partial_3 g_{23} + \partial_3 g_{23} - \partial_2 g_{33}\Big) = \frac{1}{2}g^{22}\Big(-\partial_2 g_{33}\Big) = \frac{1}{2r^2}\left(-2r^2\sin\theta\cos\theta\right) = -\sin\theta\cos\theta$$

となる．

$\alpha = 3$ のとき

$$\Gamma^3_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{33}\Big(\partial_\gamma g_{3\beta} + \partial_\beta g_{3\gamma} - \partial_3 g_{\gamma\beta}\Big) = \frac{1}{2}g^{33}\Big(\partial_\gamma g_{3\beta} + \partial_\beta g_{3\gamma}\Big)$$

より，$\beta = \gamma$ とすると，$\beta = \gamma = 1$ または $\beta = \gamma = 2$ のときは式のなかに現れる計量 $g_{\mu\nu}$ が対角成分で無いので $\Gamma^3_{11} = \Gamma^3_{22} = 0$ となる．また $\beta = \gamma = 3$ のときは，式の中の偏微分が $x^3 = \varphi$ での微分となり，これも計量の成分に φ を含む項が無いことから $\Gamma^3_{33} = 0$ となる． $\beta \neq \gamma$ のとき，式に現れる計量が対角成分になるためには $\beta = 3$ または $\gamma = 3$ であることが必要である．さらにそのうちの片方が 0 となることは無い．計算してみれば明らかであるが，計量に時間を含む項が無いからである． 以上より，クリストッフェル記号の対称性 $\Gamma^\alpha_{\gamma\beta} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ を考えると

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} &= \frac{1}{2}g^{33}\Big(\partial_1 g_{33} + \partial_3 g_{31}\Big) = \frac{1}{2}g^{33}\Big(\partial_1 g_{33}\Big) = \frac{1}{2r^2\sin^2\theta}(2r\sin^2\theta) = \frac{1}{r}\\
\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} &= \frac{1}{2}g^{33}\Big(\partial_2 g_{33} + \partial_3 g_{32}\Big) = \frac{1}{2}g^{33}\Big(\partial_2 g_{33}\Big) = \frac{1}{2r^2\sin^2\theta}(2r^2\sin\theta\cos\theta) = \frac{1}{\tan\theta} = \cot\theta
\end{aligned}$$

のみとなる．

以上の結果をまとめると $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ のうち 0 でない項は,

$$\begin{aligned}
&\Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = \frac{1}{2}\frac{d\nu(r)}{dr},\\
&\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}\frac{d\nu(r)}{dr}e^{\nu(r)-\lambda(r)},\ \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\frac{d\lambda(r)}{dr},\ \Gamma^1_{22} = -re^{-\lambda(r)},\ \Gamma^1_{33} = -re^{-\lambda(r)}\sin^2\theta,\\
&\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r},\ \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta,\\
&\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r},\ \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot\theta
\end{aligned}$$

となることが分かった．

リッチテンソルの計算

さて，接続係数（＝クリストッフェル記号）が求まったところで，リッチテンソルを求めよう．そもそもリッチテンソルの定義は,

$$R_{\mu\nu} \overset{\text{def}}{=} R^{\omega}_{\mu\omega\nu} = \partial_\omega \Gamma^{\omega}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\omega}_{\mu\omega} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\omega}_{\lambda\omega} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\omega}\Gamma^{\omega}_{\lambda\nu}$$

であり，$R_{\nu\mu} = R_{\mu\nu}$ が成り立つから，その計算すべき項は 4 つの対角成分 R_{00}，R_{11}，R_{22}，R_{33} とそれ以外の 6 つの成分 R_{01}，R_{02}，R_{03}，R_{12}，R_{13}，R_{23} の合わせて 10 個の成分である．このうち，後ろの 6 つの成分は計算すると全て 0 になる．簡単な計算なので省略してもよいが，ほとんどの本でこの計算は省略されているので，ここでは敢えて計算してみよう．

$$\begin{aligned}
R_{01} &= \partial_\omega \Gamma^{\omega}_{01} - \cancel{\partial_1 \Gamma^{\omega}_{0\omega}} + \Gamma^{\lambda}_{01}\Gamma^{\omega}_{\lambda\omega} - \Gamma^{\lambda}_{0\omega}\Gamma^{\omega}_{\lambda 1} = \cancel{\partial_0 \Gamma^{0}_{01}} + \cancel{\Gamma^{0}_{01}\Gamma^{\omega}_{0\omega}} - \left(\Gamma^{0}_{0\omega}\Gamma^{\omega}_{01} + \Gamma^{1}_{0\omega}\Gamma^{\omega}_{11} + \right) = -\cancel{\Gamma^{0}_{01}\Gamma^{1}_{01}} - \cancel{\Gamma^{1}_{00}\Gamma^{0}_{11}} = 0 \\
R_{02} &= \cancel{\partial_\omega \Gamma^{\omega}_{02}} - \cancel{\partial_2 \Gamma^{\omega}_{0\omega}} + \cancel{\Gamma^{\lambda}_{02}\Gamma^{\omega}_{\lambda\omega}} - \Gamma^{\lambda}_{0\omega}\Gamma^{\omega}_{\lambda 2} = -\cancel{\Gamma^{0}_{0\omega}\Gamma^{\omega}_{02}} - \Gamma^{1}_{0\omega}\Gamma^{\omega}_{12} = -\cancel{\Gamma^{1}_{00}\Gamma^{0}_{12}} = 0 \\
R_{03} &= \cancel{\partial_\omega \Gamma^{\omega}_{03}} - \cancel{\partial_3 \Gamma^{\omega}_{0\omega}} + \cancel{\Gamma^{\lambda}_{03}\Gamma^{\omega}_{\lambda\omega}} - \Gamma^{\lambda}_{0\omega}\Gamma^{\omega}_{\lambda 3} = -\Gamma^{0}_{0\omega}\Gamma^{\omega}_{03} - \Gamma^{1}_{0\omega}\Gamma^{\omega}_{13} = -\cancel{\Gamma^{0}_{01}\Gamma^{1}_{03}} - \cancel{\Gamma^{1}_{00}\Gamma^{0}_{13}} = 0 \\
R_{12} &= \partial_\omega \Gamma^{\omega}_{12} - \partial_2 \Gamma^{\omega}_{1\omega} + \Gamma^{\lambda}_{12}\Gamma^{\omega}_{\lambda\omega} - \Gamma^{\lambda}_{1\omega}\Gamma^{\omega}_{\lambda 2} \\
&= \cancel{\partial_2 \Gamma^{2}_{12}} - \partial_2 \left(\cancel{\Gamma^{0}_{10}} + \cancel{\Gamma^{1}_{11}} + \cancel{\Gamma^{2}_{12}} + \cancel{\Gamma^{3}_{13}}\right) + \Gamma^{2}_{12}\Gamma^{\omega}_{2\omega} - \left(\cancel{\Gamma^{0}_{1\omega}\Gamma^{\omega}_{02}} + \Gamma^{1}_{1\omega}\Gamma^{\omega}_{12} + \Gamma^{2}_{1\omega}\Gamma^{\omega}_{22} + \Gamma^{3}_{1\omega}\Gamma^{\omega}_{32}\right) \\
&= \Gamma^{2}_{12}\Gamma^{\omega}_{2\omega} - \left(\cancel{\Gamma^{1}_{11}\Gamma^{1}_{12}} + \Gamma^{2}_{12}\Gamma^{2}_{22} + \Gamma^{3}_{13}\Gamma^{3}_{32}\right) \\
&= \cancel{\Gamma^{2}_{12}\Gamma^{2}_{22}} + \Gamma^{2}_{12}\Gamma^{3}_{23} - \left(\cancel{\Gamma^{2}_{12}\Gamma^{2}_{22}} + \Gamma^{3}_{13}\Gamma^{3}_{32}\right) \\
&= \Gamma^{2}_{12}\Gamma^{3}_{23} - \Gamma^{3}_{13}\Gamma^{3}_{32} \\
&= \frac{1}{r}\cot\theta - \frac{1}{r}\cot\theta \\
&= 0 \\
R_{13} &= \partial_\omega \Gamma^{\omega}_{13} - \cancel{\partial_3 \Gamma^{\omega}_{1\omega}} + \Gamma^{\lambda}_{13}\Gamma^{\omega}_{\lambda\omega} - \Gamma^{\lambda}_{1\omega}\Gamma^{\omega}_{\lambda 3} \\
&= \cancel{\partial_3 \Gamma^{3}_{13}} + \cancel{\Gamma^{3}_{13}\Gamma^{\omega}_{3\omega}} - \left(\cancel{\Gamma^{0}_{1\omega}\Gamma^{\omega}_{03}} + \Gamma^{1}_{1\omega}\Gamma^{\omega}_{13} + \Gamma^{2}_{1\omega}\Gamma^{\omega}_{23} + \Gamma^{3}_{1\omega}\Gamma^{\omega}_{33}\right) \\
&= -\left(\cancel{\Gamma^{1}_{13}\Gamma^{3}_{13}} + \cancel{\Gamma^{2}_{13}\Gamma^{3}_{23}} + \cancel{\Gamma^{3}_{12}\Gamma^{2}_{33}}\right) \\
&= 0 \\
R_{23} &= \partial_\omega \Gamma^{\omega}_{23} - \cancel{\partial_3 \Gamma^{\omega}_{2\omega}} + \Gamma^{\lambda}_{23}\Gamma^{\omega}_{\lambda\omega} - \Gamma^{\lambda}_{2\omega}\Gamma^{\omega}_{\lambda 3} \\
&= \cancel{\partial_3 \Gamma^{3}_{23}} + \cancel{\Gamma^{3}_{23}\Gamma^{\omega}_{3\omega}} - \left(\Gamma^{1}_{2\omega}\Gamma^{\omega}_{13} + \Gamma^{2}_{2\omega}\Gamma^{\omega}_{23} + \Gamma^{3}_{2\omega}\Gamma^{\omega}_{33}\right) \\
&= -\left(\cancel{\Gamma^{1}_{22}\Gamma^{2}_{13}} + \cancel{\Gamma^{2}_{21}\Gamma^{1}_{23}} + \cancel{\Gamma^{3}_{23}\Gamma^{3}_{33}}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

以上により，$R_{01} = R_{02} = R_{03} = R_{12} = R_{13} = R_{23} = 0$ が示された．次に対角成分 R_{00}，R_{11}，R_{22}，R_{33} を計算しよう．

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \partial_\omega \Gamma^{\omega}_{00} - \cancel{\partial_0 \Gamma^{\omega}_{0\omega}} + \Gamma^{\lambda}_{00}\Gamma^{\omega}_{\lambda\omega} - \Gamma^{\lambda}_{0\omega}\Gamma^{\omega}_{\lambda 0} \\
&= \partial_1 \Gamma^{1}_{00} + \Gamma^{1}_{00}\Gamma^{\omega}_{1\omega} - \left(\Gamma^{0}_{0\omega}\Gamma^{\omega}_{00} + \Gamma^{1}_{0\omega}\Gamma^{\omega}_{10}\right) \\
&= \partial_1 \Gamma^{1}_{00} + \left(\Gamma^{1}_{00}\Gamma^{0}_{10} + \Gamma^{1}_{00}\Gamma^{1}_{11} + \Gamma^{1}_{00}\Gamma^{2}_{12} + \Gamma^{1}_{00}\Gamma^{3}_{13}\right) - \left(\Gamma^{0}_{01}\Gamma^{1}_{00} + \Gamma^{1}_{00}\Gamma^{0}_{10}\right) \\
&= \partial_1 \Gamma^{1}_{00} + \left(-\Gamma^{0}_{10} + \Gamma^{1}_{11} + \Gamma^{2}_{12} + \Gamma^{3}_{13}\right)\Gamma^{1}_{00} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{d^2\nu}{dr^2} + \left(\frac{d\nu}{dr} - \frac{d\lambda}{dr}\right)\frac{d\nu}{dr}\right\}e^{\nu-\lambda} + \frac{1}{2}\frac{d\nu}{dr}\left(-\frac{1}{2}\frac{d\nu}{dr} + \frac{1}{2}\frac{d\lambda}{dr} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r}\right)e^{\nu-\lambda} \\
&= \left\{\frac{1}{2}\frac{d^2\nu}{dr^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{d\nu}{dr}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{d\nu}{dr}\frac{d\lambda}{dr} + \frac{1}{r}\frac{d\nu}{dr}\right\}e^{\nu-\lambda}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R_{11} &= \partial_\omega \Gamma^\omega_{11} - \partial_1 \Gamma^\omega_{1\omega} + \Gamma^\lambda_{11}\Gamma^\omega_{\lambda\omega} - \Gamma^\lambda_{1\omega}\Gamma^\omega_{\lambda 1} \\
&= \cancel{\partial_1 \Gamma^1_{11}} - \partial_1 \left(\Gamma^0_{10} + \cancel{\Gamma^1_{11}} + \Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13} \right) + \Gamma^1_{11}\Gamma^\omega_{1\omega} - \left(\Gamma^0_{1\omega}\Gamma^\omega_{01} + \Gamma^1_{1\omega}\Gamma^\omega_{11} + \Gamma^2_{1\omega}\Gamma^\omega_{21} + \Gamma^3_{1\omega}\Gamma^\omega_{31} \right) \\
&= -\partial_1 \left(\Gamma^0_{10} + \Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13} \right) + \Gamma^1_{11}\Gamma^0_{10} + \cancel{\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11}} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^1_{11}\Gamma^3_{13} - \left(\Gamma^0_{10}\Gamma^0_{01} + \cancel{\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11}} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{31} \right) \\
&= -\partial_1 \left(\Gamma^0_{10} + \Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13} \right) + \Gamma^1_{11}\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^1_{11}\Gamma^3_{13} - \left(\Gamma^0_{10}\Gamma^0_{01} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{31} \right) \\
&= -\partial_1 \left(\frac{1}{2}\frac{d\nu}{dr} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{4}\frac{d\lambda}{dr}\frac{d\nu}{dr} + \frac{1}{2r}\frac{d\lambda}{dr} + \frac{1}{2r}\frac{d\lambda}{dr} - \left(\frac{1}{2}\frac{d\nu}{dr} \right)^2 - \left(\frac{1}{r} \right)^2 - \left(\frac{1}{r} \right)^2 \\
&= -\frac{1}{2}\frac{d^2\nu}{dr^2} + \cancel{\frac{2}{r^2}} + \frac{1}{4}\frac{d\lambda}{dr}\frac{d\nu}{dr} + \frac{1}{r}\frac{d\lambda}{dr} - \frac{1}{4}\left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 - \cancel{\frac{2}{r^2}} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{d^2\nu}{dr^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 + \frac{1}{4}\frac{d\lambda}{dr}\frac{d\nu}{dr} + \frac{1}{r}\frac{d\lambda}{dr} \\
R_{22} &= \partial_\omega \Gamma^\omega_{22} - \partial_2 \Gamma^\omega_{2\omega} + \Gamma^\lambda_{22}\Gamma^\omega_{\lambda\omega} - \Gamma^\lambda_{2\omega}\Gamma^\omega_{\lambda 2} \\
&= \partial_1 \Gamma^1_{22} - \partial_2 \Gamma^3_{23} + \Gamma^1_{22}\Gamma^\omega_{1\omega} - \left(\Gamma^1_{2\omega}\Gamma^\omega_{12} + \Gamma^2_{2\omega}\Gamma^\omega_{22} + \Gamma^3_{2\omega}\Gamma^\omega_{32} \right) \\
&= \partial_1 \Gamma^1_{22} - \partial_2 \Gamma^3_{23} + \left(\Gamma^1_{22}\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11} + \cancel{\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{12}} + \Gamma^1_{22}\Gamma^3_{13} \right) - \left(\cancel{\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{12}} + \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{22} + \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{32} \right) \\
&= \partial_1 \Gamma^1_{22} - \partial_2 \Gamma^3_{23} + \Gamma^1_{22}\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{22}\Gamma^3_{13} - \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{22} - \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{32} \\
&= \partial_1 \left(-re^{-\lambda} \right) - \partial_2 \cot\theta - \frac{1}{2}re^{-\lambda}\frac{d\nu}{dr} - \frac{1}{2}re^{-\lambda}\frac{d\lambda}{dr} - \cancel{e^{-\lambda}} + \cancel{e^{-\lambda}} - \cot^2\theta \\
&= \partial_1 \left(-re^{-\lambda} \right) - \partial_2 \cot\theta - \frac{1}{2}re^{-\lambda}\frac{d\nu}{dr} - \frac{1}{2}re^{-\lambda}\frac{d\lambda}{dr} - \cot^2\theta \\
&= -e^{-\lambda} + r\frac{d\lambda}{dr}e^{-\lambda} + \frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{1}{2}re^{-\lambda}\frac{d\nu}{dr} - \frac{1}{2}re^{-\lambda}\frac{d\lambda}{dr} - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \\
&= 1 - \left\{ 1 + \frac{1}{2}r\left(\frac{d\nu}{dr} - \frac{d\lambda}{dr} \right) \right\} e^{-\lambda} \\
R_{33} &= \partial_\omega \Gamma^\omega_{33} - \cancel{\partial_3 \Gamma^\omega_{3\omega}} + \Gamma^\lambda_{33}\Gamma^\omega_{\lambda\omega} - \Gamma^\lambda_{3\omega}\Gamma^\omega_{\lambda 3} \\
&= \partial_1 \Gamma^1_{33} + \partial_2 \Gamma^2_{33} + \Gamma^1_{33}\Gamma^\omega_{1\omega} + \Gamma^2_{33}\Gamma^\omega_{2\omega} - \Gamma^1_{3\omega}\Gamma^\omega_{13} - \Gamma^2_{3\omega}\Gamma^\omega_{23} - \Gamma^3_{3\omega}\Gamma^\omega_{33} \\
&= \partial_1 \Gamma^1_{33} + \partial_2 \Gamma^2_{33} + \Gamma^1_{33}\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{33}\Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{33}\Gamma^2_{12} + \cancel{\Gamma^1_{33}\Gamma^3_{13}} + \cancel{\Gamma^2_{33}\Gamma^3_{23}} - \cancel{\Gamma^1_{33}\Gamma^3_{13}} - \cancel{\Gamma^2_{33}\Gamma^3_{23}} - \Gamma^3_{31}\Gamma^1_{33} - \Gamma^3_{32}\Gamma^2_{33} \\
&= \partial_1 \Gamma^1_{33} + \partial_2 \Gamma^2_{33} + \Gamma^1_{33}\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{33}\Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{33}\Gamma^2_{12} - \Gamma^3_{31}\Gamma^1_{33} - \Gamma^3_{32}\Gamma^2_{33} \\
&= \partial_1 \left(-re^{-\lambda}\sin^2\theta \right) + \partial_2 \left(-\sin\theta\cos\theta \right) - \frac{1}{2}re^{-\lambda}\sin^2\theta\frac{d\nu}{dr} - \frac{1}{2}re^{-\lambda}\sin^2\theta\frac{d\lambda}{dr} - \cancel{e^{-\lambda}\sin^2\theta} + \cancel{e^{-\lambda}\sin^2\theta} + \cos^2\theta \\
&= \left(r\frac{d\lambda}{dr} - 1 \right) e^{-\lambda}\sin^2\theta - \cancel{\cos^2\theta} + \sin^2\theta - \frac{1}{2}r\frac{d\nu}{dr}e^{-\lambda}\sin^2\theta - \frac{1}{2}r\frac{d\lambda}{dr}e^{-\lambda}\sin^2\theta + \cancel{\cos^2\theta} \\
&= \left[1 - \left\{ 1 + \frac{1}{2}r\left(\frac{d\nu}{dr} - \frac{d\lambda}{dr} \right) \right\} e^{-\lambda} \right] \sin^2\theta \\
&= R_{22}\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

以上より，全てのリッチテンソルは，

$$
\begin{aligned}
R_{00} &= \left\{ \frac{1}{2}\frac{d^2\nu}{dr^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 - \frac{1}{4}\frac{d\nu}{dr}\frac{d\lambda}{dr} + \frac{1}{r}\frac{d\nu}{dr} \right\} e^{\nu-\lambda} \\
R_{11} &= -\frac{1}{2}\frac{d^2\nu}{dr^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 + \frac{1}{4}\frac{d\lambda}{dr}\frac{d\nu}{dr} + \frac{1}{r}\frac{d\lambda}{dr} \\
R_{22} &= 1 - \left\{ 1 + \frac{1}{2}r\left(\frac{d\nu}{dr} - \frac{d\lambda}{dr} \right) \right\} e^{-\lambda} \\
R_{33} &= R_{22}\sin^2\theta \\
R_{\mu\nu} &= 0 \qquad (\mu \neq \nu)
\end{aligned}
$$

となることが分かった.

スカラー曲率の計算

リーマンテンソルの各成分が求まったので，次はスカラー曲率を求めよう．スカラー曲率の定義は,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

であった．今,

$$g_{00} = -e^{\nu},\ g_{11} = e^{\lambda},\ g_{22} = r^2,\ g_{33} = r^2 \sin^2\theta,\ g_{\alpha\beta} = 0\ (\alpha \neq \beta),$$
$$g^{00} = -e^{-\nu},\ g^{11} = e^{-\lambda},\ g^{22} = \frac{1}{r^2},\ g^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2\theta},\ g^{\alpha\beta} = 0\ (\alpha \neq \beta),$$

及び,

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \left\{ \frac{1}{2}\frac{d^2\nu}{dr^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{d\nu}{dr}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{d\nu}{dr}\frac{d\lambda}{dr} + \frac{1}{r}\frac{d\nu}{dr} \right\} e^{\nu-\lambda} \\
R_{11} &= -\frac{1}{2}\frac{d^2\nu}{dr^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{d\nu}{dr}\right)^2 + \frac{1}{4}\frac{d\lambda}{dr}\frac{d\nu}{dr} + \frac{1}{r}\frac{d\lambda}{dr} \\
R_{22} &= 1 - \left\{ 1 + \frac{1}{2} r \left(\frac{d\nu}{dr} - \frac{d\lambda}{dr} \right) \right\} e^{-\lambda} \\
R_{33} &= R_{22} \sin^2\theta \\
R_{\mu\nu} &= 0 \qquad (\mu \neq \nu)
\end{aligned}$$

だから,

$$\begin{aligned}
R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\
&= g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} \\
&= -\left\{ \frac{1}{2}\frac{d^2\nu}{dr^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{d\nu}{dr}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{d\nu}{dr}\frac{d\lambda}{dr} + \frac{1}{r}\frac{d\nu}{dr} \right\} e^{-\lambda} + \left\{ -\frac{1}{2}\frac{d^2\nu}{dr^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{d\nu}{dr}\right)^2 + \frac{1}{4}\frac{d\lambda}{dr}\frac{d\nu}{dr} + \frac{1}{r}\frac{d\lambda}{dr} \right\} e^{-\lambda} + \frac{1}{r^2} R_{22} + \frac{1}{r^2} R_{22} \\
&= \left\{ -\frac{d^2\nu}{dr^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{d\nu}{dr}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{d\lambda}{dr}\frac{d\nu}{dr} + \frac{1}{r}\left(\frac{d\lambda}{dr} - \frac{d\nu}{dr} \right) \right\} e^{-\lambda} + \frac{2}{r^2}\left[1 - \left\{ 1 + \frac{1}{2} r \left(\frac{d\nu}{dr} - \frac{d\lambda}{dr} \right) \right\} e^{-\lambda} \right] \\
&= \frac{2}{r^2} + \left\{ -\frac{d^2\nu}{dr^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{d\nu}{dr}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{d\lambda}{dr}\frac{d\nu}{dr} + \frac{2}{r}\left(\frac{d\lambda}{dr} - \frac{d\nu}{dr} \right) - \frac{2}{r^2} \right\} e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

を得る．

アインシュタインテンソルの計算

続いて，アインシュタインテンソルを計算しよう．アインシュタインテンソルの定義は，

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

であるが，今考えているものは当然対角成分以外は 0 になるから，

$$\begin{aligned}
G_{00} &= R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R \\
&= \left\{\cancel{\frac{1}{2}\frac{d^2\nu}{dr^2}} + \cancel{\frac{1}{4}\left(\frac{d\nu}{dr}\right)^2} - \cancel{\frac{1}{4}\frac{d\nu}{dr}\frac{d\lambda}{dr}} + \cancel{\frac{1}{r}\frac{d\nu}{dr}}\right\}e^{\nu-\lambda} \\
&\quad + \frac{1}{r^2}e^{\nu} + \left\{-\cancel{\frac{1}{2}\frac{d^2\nu}{dr^2}} - \cancel{\frac{1}{4}\left(\frac{d\nu}{dr}\right)^2} + \cancel{\frac{1}{4}\frac{d\lambda}{dr}\frac{d\nu}{dr}} + \frac{1}{r}\frac{d\lambda}{dr} - \cancel{\frac{1}{r}\frac{d\nu}{dr}} - \frac{1}{r^2}\right\}e^{\nu-\lambda} \\
&= \frac{1}{r^2}e^{\nu} + \left(\frac{1}{r}\frac{d\lambda}{dr} - \frac{1}{r^2}\right)e^{\nu-\lambda} \\
&= \frac{e^{\nu}}{r^2}\left\{1 - e^{-\lambda}\left(1 - r\frac{d\lambda}{dr}\right)\right\} \\
G_{11} &= R_{11} - \frac{1}{2}g_{1}R \\
&= -\cancel{\frac{1}{2}\frac{d^2\nu}{dr^2}} - \cancel{\frac{1}{4}\left(\frac{d\nu}{dr}\right)^2} + \cancel{\frac{1}{4}\frac{d\lambda}{dr}\frac{d\nu}{dr}} + \cancel{\frac{1}{r}\frac{d\lambda}{dr}} - \frac{1}{r^2}e^{\lambda} - \left\{-\cancel{\frac{1}{2}\frac{d^2\nu}{dr^2}} - \cancel{\frac{1}{4}\left(\frac{d\nu}{dr}\right)^2} + \cancel{\frac{1}{4}\frac{d\lambda}{dr}\frac{d\nu}{dr}} + \cancel{\frac{1}{r}\frac{d\lambda}{dr}} - \frac{1}{r}\frac{d\nu}{dr} - \frac{1}{r^2}\right\} \\
&= -\frac{1}{r^2}e^{\lambda} + \frac{1}{r}\frac{d\nu}{dr} + \frac{1}{r^2} \\
&= -\frac{e^{\lambda}}{r^2}\left\{1 - e^{-\lambda}\left(1 + r\frac{d\nu}{dr}\right)\right\} \\
G_{22} &= R_{22} - \frac{1}{2}g_{22}R \\
&= \cancel{1} - \left\{\cancel{1} + \frac{1}{2}r\left(\frac{d\nu}{dr} - \frac{d\lambda}{dr}\right)\right\}e^{-\lambda} - \cancel{1} - \left\{-\frac{1}{2}r^2\frac{d^2\nu}{dr^2} - \frac{1}{4}r^2\left(\frac{d\nu}{dr}\right)^2 + \frac{1}{4}r^2\frac{d\lambda}{dr}\frac{d\nu}{dr} + r\left(\frac{d\lambda}{dr} - \frac{d\nu}{dr}\right) - \cancel{1}\right\}e^{-\lambda} \\
&= \left\{\frac{1}{2}r^2\frac{d^2\nu}{dr^2} + \frac{1}{4}r^2\left(\frac{d\nu}{dr}\right)^2 - \frac{1}{4}r^2\frac{d\lambda}{dr}\frac{d\nu}{dr} + \frac{1}{2}r\left(\frac{d\nu}{dr} - \frac{d\lambda}{dr}\right)\right\}e^{-\lambda} \\
&= \frac{r^2e^{-\lambda}}{2}\left\{\frac{d^2\nu}{dr^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\nu}{dr}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{d\nu}{dr}\frac{d\lambda}{dr} - \frac{1}{r}\left(\frac{d\lambda}{dr} - \frac{d\nu}{dr}\right)\right\} \\
G_{33} &= R_{33} - \frac{1}{2}g_{33}R \\
&= R_{22}\sin^2\theta - \frac{1}{2}r^2\sin^2\theta R \\
&= R_{22}\sin^2\theta - \frac{1}{2}g_{22}\theta R\sin^2 \\
&= G_{22}\sin^2\theta
\end{aligned}$$

以上より，アインシュタインテンソルは，

$$\begin{aligned}
G_{00} &= \frac{e^{\nu}}{r^2}\left\{1 - e^{-\lambda}\left(1 - r\frac{d\lambda}{dr}\right)\right\} \\
G_{11} &= -\frac{e^{\lambda}}{r^2}\left\{1 - e^{-\lambda}\left(1 + r\frac{d\nu}{dr}\right)\right\} \\
G_{22} &= \frac{r^2e^{-\lambda}}{2}\left\{\frac{d^2\nu}{dr^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\nu}{dr}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{d\nu}{dr}\frac{d\lambda}{dr} - \frac{1}{r}\left(\frac{d\lambda}{dr} - \frac{d\nu}{dr}\right)\right\} \\
G_{33} &= G_{22}\sin^2\theta \\
G_{\mu\nu} &= 0 \qquad (\mu \neq \nu)
\end{aligned}$$

となることが分かった．