シュヴァルツシルトブラックホールの物理的解釈

シュヴァルツシルトの外部解において，シュヴァルツシルト半径の内側に全質量が分布しているときブラックホールの解になる．これをシュヴァルツシルトブラックホールという．ここでは，シュヴァルツシルトブラックホールの解の物理的意味を探ろう．

シュヴァルツシルトの解

まず，最初にシュヴァルツシルトの外部解は次のように表される:

$$ds^2 = -(1-r_g/r)dw^2 + \frac{dr^2}{1-r_g/r} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

$$\text{ただし，} r_g = \frac{2GM}{c^2}$$

今の段階ではこの解がブラックホールになっているかどうかはまだ分からないが，便宜上そのままの名前で呼ぼう．まず最初にこのシュヴァルツシルトブラックホールの中心方向に光を照射したとき何が起こるか調べてみよう．今，光の経路は動径方向だけとしてよいから，$d\theta = 0$，$d\varphi = 0$ としてよい．つまり，

$$ds^2 = -(1-r_g/r)dw^2 + \frac{dr^2}{1-r_g/r}$$

である． さてここで実は光の先端の進む経路では常に ds = 0 となっていることを示そう． 今不変間隔 ds は名前の通り一般座標変換で不変となる量であるから，特に局所的に慣性系となる座標系（物体が自由落下する座標系）を選んでもその値が変わる事は無い．さらにその座標軸を適当に回転などさせる事により局所的にミンコフスキー計量になっているとしてよい．すると，

$$ds^2 = -dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

が成り立っているので，光の運動を表す $v = c$ を代入してこの両辺を dt で割ってやると，

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = -\left\{\frac{d(ct)}{dt}\right\}^2 + {v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2 = -c^2\left(\frac{dt}{dt}\right)^2 + v^2 = -c^2 + c^2 = 0$$

より $ds^2 = 0 \cdot dt^2 = 0$ が成り立つ．今見てきたことは座標の選び方に寄らないので，結局光の進む経路はどのような座標系を選んでも，$ds = 0$ となることになる．この条件をヌル (null)(光的) と呼ぶ (null とは英語で 0 を表す).

さてこのことより結局解くべき式は,

$$-(1-r_g/r)dw^2 + \frac{dr^2}{1-r_g/r} = 0$$

となることが分かった．これは少し変形すると，

$$c\frac{dt}{dr} = \frac{dw}{dr} = \pm\frac{1}{1-r_g/r} = \pm\left(\frac{r}{r-r_g}\right) = \pm\left(1 + \frac{r_g}{r-r_g}\right)$$

となり解が正負二つ現れるが，これは光の進路が順方向と逆方向の 2 つが取れる事を表している．$r \to \infty$ では $c\dfrac{dt}{dr}$ が ±1 となりこれは，時空図における光円錐の傾きが外向きで $45°$，内向きで $135°$ となることを意味し，充分遠方では空間がミンコフスキー空間とみなせる事を表す．一方 $r \to r_g + 0$ では

$$c\frac{dt}{dr} = \pm\frac{1}{1-r_g/r} = \pm\frac{1}{1-(1-0)} = \pm\frac{1}{+0} = \pm\infty \qquad \text{(複合同順)}$$

だから，時空の連続性より， 充分遠方では $45°$ の傾きだった線が + の傾きの線となり，$135°$ の傾きだった線が − の傾きの線となることから，上向きの光円錐が段々つぶれて縦長になり，$r = r_g$ では完全につぶれてしまうことが分かる．また，$r \to r_g - 0$ では

$$c\frac{dt}{dr} = \pm\frac{1}{1-r_g/r} = \pm\frac{1}{1-(1+0)} = \pm\frac{1}{-0} = \mp\infty \qquad \text{(複合同順)}$$

となることから，先ほどまで $+\infty$ だった線は $-\infty$ となり $-\infty$ だった線は $+\infty$ となる．これは光円錐が中心方向に向きつつ上下に無限に開いたつぶれた形になることを示している．同じようにして $r \to +0$ では,

$$c\frac{dt}{dr} = \pm\frac{1}{1-r_g/r} = \pm\frac{1}{1-\infty} = \pm(-0) = \mp0 \qquad \text{(複合同順)}$$

となり向きは同じだが横に向いたまま光円錐の開く角度が完全につぶれてしまう．この様子を図に表すと次のようになる．

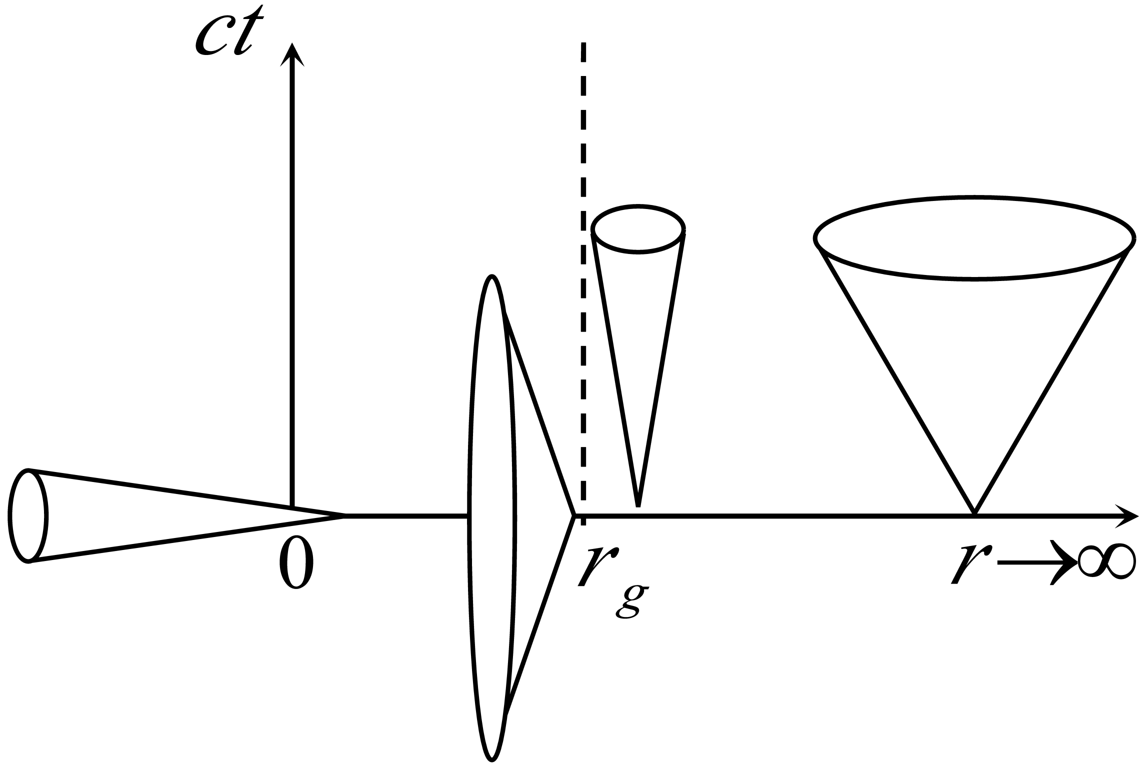

図 1: シュヴァルツシルトブラックホール周辺での未来方向の光円錐の挙動

次にこの式を積分して進む経路を詳しく調べてみよう．

$$ct = \int_0^t c dt = \int_{r_0}^r \pm\left(1 + \frac{r_g}{r - r_g}\right) dr = \left[\pm\Big(r + r_g \ln|r - r_g|\Big)\right]_{r_0}^r = \pm\Big(r + r_g \ln|r - r_g| - R\Big)$$

(ただし積分定数 R は $R \equiv r_0 + r_g \ln|r_0 - r_g|$ と置いた.)

より，

$$ct = \pm\Big(r + r_g \ln|r - r_g| - R\Big) \tag{1}$$

が得られる．この解は $r > r_g$ の場合と $r < r_g$ の場合の二つの場合に分けられる．まずは $r > r_g$ の場合について考えてみよう．まずは外向きの解について考えてみる．$r \to r_g + 0$ とすると，$ct \to -\infty$ となり $r \gg r_g$ で $ct \simeq r$ となるから，時空図上で $r = r_g + 0$ で $ct = -\infty$ からまっすぐ立ち上がり, 単調に増加しながら段々傾きが $+45°$ に近づいていくことになる．次に内向きの解について考える．$r \gg r_g$ では，$ct \simeq -r$ となり充分遠方では, $+135°$ の傾きであるが，$r \to r_g + 0$ とすると $ct = +\infty$ となり，これは時空図上で遠方では $+135°$ で立ち上がり $r = r_g + 0$ に近づくに従って単調に増加し続け，$r \to r_g + 0$ ではまっすぐ上に立ち上がる形になる．

$r < r_g$ の場合，$+$ の解は $r \to r_g - 0$ で $ct \to -\infty$ となるが，$r \to +0$ では $r_g \ln r_g - R$ という一定値に単調に近づくので，これは内向きの解となる．　逆に $-$ の解は $r \to +0$ で $-(r_g \ln r_g - R)$ と言う一定値から始まり，$r \to r_g - 0$ で $ct \to \infty$ まで単調に増加するのでこれは外向きの解を表している．従って $r > r_g$ と $r < r_g$ では $+$ の解が外向きから内向きへ，逆に $-$ では内向きから外向きの解へ反転する事になる．

さて全ての領域での光線の軌跡と光円錐が分かったところで，これが何を意味するのか考えてみよう．まず $r > r_g$ の領域ではシュヴァルツシルト半径 r_{g} よりちょっとだけ外側から外側に発する光は最初は非常にゆっくりと動径方向外側に向かい，徐々に早く外側に進むようになり最終的には通常通りほぼ $r = ct$ で進むようになる．しかし $r = r_g$ の地点から外側に向かう光はどんなに時間が立っても全く外側に向かう事は無くシュヴァルツシルト半径 r_g の位置にとどまる事になる．逆に内向きの光も最初は $r = ct$ の”速さ”(※速度で無いことに注意) でブラックホール中心に向かうが，中心に向かうにつれて徐々にゆっくりと移動するようになり，決して $r = r_g$ に到達する事は出来ない事になる．

一方，$r < r_g$ の領域ではがらりと様相が変わる．光の軌跡だけ考えると内向きの解と外向きの解が逆になっただけのようにも思えるが，光円錐は完全に動径方向内側に倒れてしまっている！ これは即ち，座標軸のとり方の問題で，動径方向はもはや空間としての役割を果たさず，時間として機能していることを表している．光円錐の未来方向が動径方向内側に向いているのであるから，これは光でさえ (従ってどんな物体でも) このブラックホールの中心に向かって落ち込んでしまう事を表している．この光線の軌跡は次のようになる．

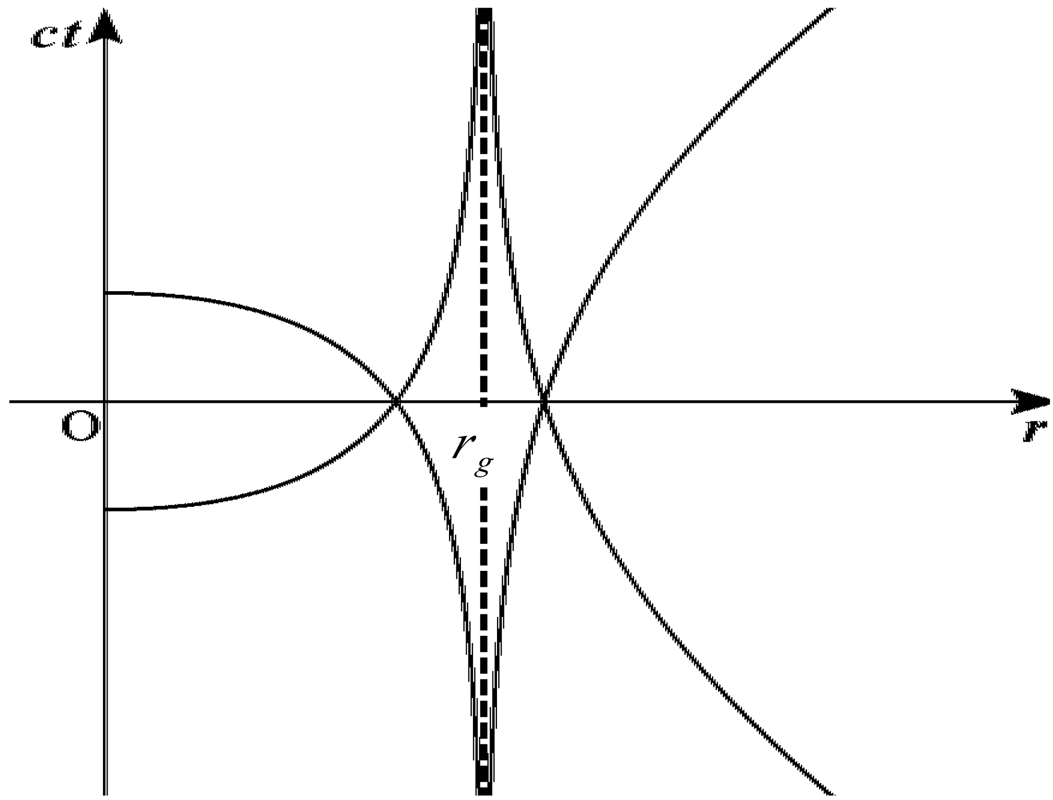

図 2: シュヴァルツシルトブラックホール周辺での光線の軌道

さていままでの議論により，シュヴァルツシルト半径の内側からは光は一切外に出ないし，逆に外側から中心に向かう光も決してシュヴァルツシルト半径を超えて内側に進入する事が無いことが分かったが，これは一体どの立場から見た現象なのであろうか？一般に固有時と不変間隔に対して，$ds^2 = -c^2 d\tau^2$ が成り立っているのであった．すると動径方向にも半径方向にも静止している観測者に対しては，$dr = 0$，$d\theta = 0$，$d\varphi = 0$ としてよいから，$ds^2 = -c^2 d\tau = -(1 - r_g/r)(cdt)^2$ より，$d\tau = \sqrt{1 - r_g/r}dt$ が成り立つことになる．この式は明らかに $r \to \infty$ で $d\tau = dt$ となる．このことはつまり今まで考えてきた座標時間とは，充分遠方で静止している観測者の固有時間を表していたことを示している．

今までの議論をまとめると次のことが言えたことになる．充分遠方の静止した観測者から見るとこのブラックホールに向かう光はシュヴァルツシルト半径に近づくに従って徐々にゆっくり進むように見え，決してシュヴァルツシルト半径 $r = r_g$ に到達する事は無い．またシュヴァルツシルト半径の外側から観測者に向かう光は最初はゆっくりと近づいてゆくが徐々に速さが早くなり観測者に近づくにつれて通常の光の速さで届く事になる[1]．一方シュヴァルツシルト半径の内側の光は，どのように進もうとも，決してシュヴァルツシルト半径を超える事は無く，従って観測者はこの光を観測する事は出来ないことになる．今考えた観測者はこのシュヴァルツシルトブラックホールより充分離れていると仮定したが，シュヴァルツシルト半径より外側のどのような観測者であっても，もしシュヴァルツシルト半径より内側からやってくる光が観測できるとすると，矛盾してしまう．何故ならシュヴァルツシルト半径より少しでも外側から動径方向正の方向に向かう光は十分遠方の観測者から観測できるからである．従ってシュヴァルツシルト半径より内側からは光すら出てこれないというのはシュヴァルツシルト半径より外側の任意の観測者に対して成り立つ事であるとしてよい．この理論的事実をもって物理学者のホイーラー (John Archibald Wheeler, 1911〜2008) は 1967 年にこのような天体を”ブラックホール”と命名した．

[1] このことはブラックホール近辺での時間が本当にゆっくり進むため，光ですらゆっくり進んでいるように見えることを表しており，一般相対論の顕著な特徴である．しかし，この光が目の前まで来たときの速さは当然光速 c となっており，慣性系において光が進む速さが c であることと矛盾しない．