0.1　宇宙赤方偏移

銀河 A にいるアリスが，銀河 B にいるボブに波長 λ_1 の光を発射する実験を考える．ボブが受け取る光の波長を λ_0 とすると，宇宙が膨張しているときは，$\lambda_0 > \lambda_1$，つまりボブの受信する光の波長はアリスの発射した光の波長より長くなる．これを宇宙赤方偏移と呼ぶ．ここではこの宇宙赤方偏移について述べよう．

まず，アリスもボブも共動座標を選んだときに，静止しているものとしよう．宇宙赤方偏移は，このようにそれぞれ共動座標で静止した光源と観測者の間で起こることを表すからである．すでに説明したとおり，この共動座標とは風船の表面にマス目を描いて 2 点 A，B をとるとき，風船のマス目で測ったような座標である．風船の膨張によって A，B 間の間隔は広くなるが，風船に描いたマス目で測ってみると，マス目自体が伸びてしまうため，結局膨張前と同じ距離になる．つまり共動座標とはこのような座標のことを意味するのであった．また簡単のため，ボブの座標を原点 $r = 0$ にとろう．宇宙は一様等方な空間だと仮定した場合，どの点でも原点にとれるからこのように仮定して問題ない．このとき，時刻 t_1 にアリスが動径座標 r_1 の地点から波長 λ_1 の光を発射し，その同じ光を時刻 t_0 に原点にいるボブが波長 λ_0 の光として観測するとしよう．すると一般にこの実験の状況は次のようになる:

光の発射:　世界点 $(ct_1, r_1, \theta_1, \phi_1)$ からアリスが波長 λ_1 の光を発射

光の観測:　アリスが発射した光を世界点 $(ct_0, 0, 0, 0)$ にボブが波長 λ_0 の光として観測

いま，空間の等方性より，この光の進む経路では θ も ϕ も一定なので $d\theta = 0, d\phi = 0$ である．また光の進む経路に沿った世界間隔はヌル（null）

$ds^2 = 0$ なのだからけっきょく次が成り立つ:

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a(t)^2 \frac{dr^2}{1-Kr^2} = 0$$

これより,

$$\frac{cdt}{a(t)} = -\frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}} \tag{1}$$

が得られる．右辺に負号が付いているのは，$r > 0$ の点から $r = 0$ の点に光が進むにしたがって r は減少するが，このとき時間の方は増大するからである．したがって，この両辺を光の発射から観測までの時間と位置での積分にすると,

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{r_1}^{0} -\frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}} \tag{2}$$

が成り立つ．次に光の波長の変化を見るため，発射した光の 1 周期 $T_1 = \delta t_1$ 分遅れた光について同じことを考えよう[*1]．このときアリスもボブも共動座標に対して静止しているから，それぞれの空間座標は先ほどと一緒のはずなので,

光の発射: 世界点 $(c(t_1 + \delta t_1), r_1, \theta_1, \phi_1)$ からアリスが波長 λ_1 の光を発射

光の観測: アリスが発射した光を世界点 $(c(t_0 + \delta t_0), 0, 0, 0)$ にボブが波長 λ_0 の光として観測

となるはずである．したがって，(1) をこの範囲で積分すると,

$$\int_{t_1+\delta t_1}^{t_0+\delta t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{r_1}^{0} -\frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}}$$

となり右辺は全く，(2) と一緒になる．これより,

$$\int_{t_1+\delta t_1}^{t_0+\delta t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} \tag{3}$$

[*1] もちろん，$c = \lambda_1 / T_1$ である．

が成り立つ．ここで一般に，関数 $y=f(t)$ についてその原始関数を $F(t)$ とすれば,

$$\int_{t_1+\delta t_1}^{t_0+\delta t_0} f(t)dt = F(t_1+\delta t_1) - F(t_0+\delta t_0) \tag{4}$$

同様に,

$$\int_{t_1}^{t_0} f(t)dt = F(t_1) - F(t_0) \tag{5}$$

が成り立つが,

$$\int_{t_1+\delta t_1}^{t_0+\delta t_0} f(t)dt = \int_{t_1}^{t_0} f(t)dt$$

が成り立つとき，(4) と (5) の両辺が等しいので,

$$F(t_1+\delta t_1) - F(t_0+\delta t_0) = F(t_1) - F(t_0)$$

である．これより,

$$F(t_1+\delta t_1) - F(t_1) = F(t_0+\delta t_0) - F(t_0)$$

が成り立つが，これは,

$$\int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} f(t)dt = \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} f(t)dt$$

が成り立つことを意味する．この結果を用いると，(3) より,

$$\int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} \frac{cdt}{a(t)}$$

が成り立つ．ここで光の 1 周期は非常に小さいので，積分の平均値の定理より[*2],

$$\frac{c\delta t_0}{a(t_0)} = \frac{c\delta t_1}{a(t_1)} \tag{6}$$

[*2] 単純に δt が小さいとき，$t+\delta t$ から t までの間の $f(t)$ の囲む面積は，大体 $\delta t \times f(t)$ になるということ．

が得られるが，いま，波の速さは一般に（波長）×（振動数）＝（波長）÷（周期）なので，

$$c = \frac{\lambda_0}{\delta t_0} = \frac{\lambda_1}{\delta t_1}$$

が成り立つから，(6) より，

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{\delta t_1}{\delta t_0} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} \tag{7}$$

が成り立つことになる．これを見ると，時刻 t_1 の過去に宇宙のスケールが $a(t_1)$ だったのが，現時刻 t_0 までに宇宙のスケールが $a(t_0)$ に膨張（$a(t_0) > a(t_1)$）したとすると，観測する波長もその割合だけ元の波長より大きくなることがわかる．この結果の面白いのは，宇宙赤方偏移の度合いは，宇宙の膨張の “仕方” については無関係で，単純にアリスが光を発射した時の宇宙のスケールとボブがそれを受信した時の宇宙のスケールの**比だけで決まる**という点である．