一様等方空間

この項では膨張宇宙の解として知られるアインシュタイン方程式の厳密解であるフリードマン解を求める準備として，空間成分が 3 次元一様等方空間となっているような 4 次元時空の不変間隔を求める．

まず最初に，シュヴァルツシルト解を求めるところで利用した球対称空間より，時空の空間成分は,

$$d\ell^2 = f(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{1}$$

と表されるのであった．この段階では球対称性のみ仮定され，並進一様性は用いていない．従って，この解に並進一様性を仮定してより具体的な形を求めよう．

空間成分の並進一様性はリー微分を用いて $\mathcal{L}_\xi g_{ij} = 0$ で表される．2 階の共変テンソルのリー微分の定義より，

$$\mathcal{L}_\xi g_{ij} = g_{ij,\,k}\xi^k + g_{kj}\xi^k_{,\,i} + g_{ik}\xi^k_{,\,j} = 0 \tag{2}$$

が解くべき方程式となる．ここで，(1) 式より，

$$g_{11} = g_{rr} = f(r),\ g_{22} = g_{\theta\theta} = r^2,\ g_{33} = g_{\varphi\varphi} = g_{\theta\theta}\sin^2\theta = r^2\sin^2\theta,\ g_{ij} = 0,\ (i \neq j)$$

であるから，(2) 式より，

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\xi g_{rr} &= g_{rr,\,k}\xi^k + g_{kr}\xi^k_{,\,r} + g_{rk}\xi^k_{,\,r} = g_{rr,\,r}\xi^r + g_{rr}\xi^r_{,\,r} + g_{rr}\xi^r_{,\,r} = f_{,\,r}\xi^r + 2f\xi^r_{,\,r} = 0 \\
\mathcal{L}_\xi g_{\theta\theta} &= g_{\theta\theta,\,k}\xi^k + g_{k\theta}\xi^k_{,\,\theta} + g_{\theta k}\xi^k_{,\,\theta} = g_{\theta\theta,\,r}\xi^r + g_{\theta\theta}\xi^\theta_{,\,\theta} + g_{\theta\theta}\xi^\theta_{,\,\theta} = 2r\xi^r + 2r^2\xi^\theta_{,\,\theta} = 0 \\
\mathcal{L}_\xi g_{\varphi\varphi} &= g_{\varphi\varphi,\,k}\xi^k + g_{k\varphi}\xi^k_{,\,\varphi} + g_{\varphi k}\xi^k_{,\,\varphi} = g_{\varphi\varphi,\,r}\xi^r + g_{\varphi\varphi,\,\theta}\xi^\theta + g_{\varphi\varphi}\xi^\varphi_{,\,\varphi} + g_{\varphi\varphi}\xi^\varphi_{,\,\varphi} \\
&= 2r\sin^2\theta\xi^r + 2r^2\sin\theta\cos\theta\xi^\theta + 2r^2\sin^2\theta\xi^\varphi_{,\,\varphi} = 0 \\
\mathcal{L}_\xi g_{r\theta} &= g_{r\theta,\,k}\xi^k + g_{k\theta}\xi^k_{,\,r} + g_{rk}\xi^k_{,\,\theta} = g_{\theta\theta}\xi^\theta_{,\,r} + g_{rr}\xi^r_{,\,\theta} = r^2\xi^\theta_{,\,r} + f\xi^r_{,\,\theta} = 0 \\
\mathcal{L}_\xi g_{r\varphi} &= g_{r\varphi,\,k}\xi^k + g_{k\varphi}\xi^k_{,\,r} + g_{rk}\xi^k_{,\,\varphi} = g_{\varphi\varphi}\xi^\varphi_{,\,r} + g_{rr}\xi^r_{,\,\varphi} = r^2\sin^2\theta\xi^\varphi_{,\,r} + f\xi^r_{,\,\varphi} = 0 \\
\mathcal{L}_\xi g_{\theta\varphi} &= g_{\theta\varphi,\,k}\xi^k + g_{k\varphi}\xi^k_{,\,\theta} + g_{\theta k}\xi^k_{,\,\varphi} = g_{\varphi\varphi}\xi^\varphi_{,\,\theta} + g_{\theta\theta}\xi^\theta_{,\,\varphi} = r^2\sin^2\theta\xi^\varphi_{,\,\theta} + r^2\xi^\theta_{,\,\varphi} = 0
\end{aligned}$$

が得られるから，得られた方程式は,

$$f_{,\,r}\xi^r + 2f\xi^r_{,\,r} = 0 \tag{3}$$
$$\xi^r + r\xi^\theta_{,\,\theta} = 0 \tag{4}$$
$$\frac{1}{r}\xi^r + \cot\theta\xi^\theta + \xi^\varphi_{,\,\varphi} = 0 \tag{5}$$
$$r^2\xi^\theta_{,\,r} + f\xi^r_{,\,\theta} = 0 \tag{6}$$
$$r^2\sin^2\theta\xi^\varphi_{,\,r} + f\xi^r_{,\,\varphi} = 0 \tag{7}$$
$$\sin^2\theta\xi^\varphi_{,\,\theta} + \xi^\theta_{,\,\varphi} = 0 \tag{8}$$

のようにまとめられる．

まず，(3) 式より，

$$\frac{\partial_r\xi^r}{\xi^r} = \frac{\xi^r_{,\,r}}{\xi^r} = -\frac{1}{2}\frac{f_{,\,r}}{f} = -\frac{1}{2}\frac{\partial_r f}{f}$$

だから，

$$\begin{aligned}
\ln|\xi^r| &= -\frac{1}{2}\ln|f| + C(\theta,\ \varphi) \\
\therefore \qquad |\xi^r| &= e^{C(\theta,\,\varphi)}\cdot|f|^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

よって，

$$\xi^r = \alpha(\theta,\ \varphi)|f|^{-\frac{1}{2}} \tag{9}$$

また，(4) より，

$$\partial_r \partial_\theta \xi^\theta = \partial_r \xi^\theta_{,\,\theta} = \partial_r \left(-\frac{1}{r} \xi^r \right) \tag{10}$$

一方，(6) より，

$$\partial_\theta \partial_r \xi^\theta = \partial_\theta \xi^\theta_{,\,r} = \partial_\theta \left(-\frac{f(r)}{r^2} \xi^r_{,\,\theta} \right) = -\frac{f(r)}{r^2} \partial_\theta^2 \xi^r \tag{11}$$

よって，(10) = (11) より，

$$r^2 \partial_r \left(\frac{1}{r} \xi^r \right) = f(r) \partial_\theta^2 \xi^r \tag{12}$$

ここで $f(r)$ の符号を $\mathrm{sgn}(f(r))$ とし，(9) 式を代入すると，

$$\alpha(\theta,\ \varphi) r^2 \partial_r \left[\frac{|f(r)|^{-\frac{1}{2}}}{r} \right] = \mathrm{sgn}(f(r)) |f(r)|^{\frac{1}{2}} \partial_\theta^2 \alpha(\theta,\ \varphi)$$

より，

$$\frac{\partial_\theta^2 \alpha(\theta,\ \varphi)}{\alpha(\theta,\ \varphi)} = \mathrm{sgn}(f(r)) r^2 |f(r)|^{-\frac{1}{2}} \partial_r \left[\frac{|f(r)|^{-\frac{1}{2}}}{r} \right] \tag{13}$$

を得るが，この式は左辺が θ と φ だけの式で右辺が r だけの式である．従ってこの式が恒等的に成り立つためには，両辺が定数でないといけない．その定数を A とすると，

$$\mathrm{sgn}(f(r)) r^2 |f(r)|^{-\frac{1}{2}} \partial_r \left[\frac{|f(r)|^{-\frac{1}{2}}}{r} \right] = A \tag{14}$$

となるが，ここで，

$$\begin{aligned}
\partial_r \left[\frac{|f(r)|^{-\frac{1}{2}}}{r} \right] &= \frac{1}{r} \partial_r |f(r)|^{-\frac{1}{2}} - \frac{|f(r)|^{-\frac{1}{2}}}{r^2} \\
&= \frac{1}{r} \times \left(-\frac{1}{2} |f(r)|^{-\frac{3}{2}} \right) \partial_r |f(r)| - \frac{|f(r)|^{-\frac{1}{2}}}{r^2} \\
&= -\frac{|f(r)|^{-\frac{3}{2}}}{2r} \partial_r |f(r)| - \frac{|f(r)|^{-\frac{1}{2}}}{r^2}
\end{aligned}$$

だから，(14) 式に代入すると，

$$\begin{aligned}
\mathrm{sgn}(f(r)) r^2 |f(r)|^{-\frac{1}{2}} \left[-\frac{|f(r)|^{-\frac{3}{2}}}{2r} \partial_r |f(r)| - \frac{|f(r)|^{-\frac{1}{2}}}{r^2} \right] &= -\mathrm{sgn}(f(r)) \left(\frac{r}{2} |f(r)|^{-2} \partial_r |f(r)| + |f(r)|^{-1} \right) \\
&= -\frac{r}{2} f(r)^{-2} \partial_r \left[\mathrm{sgn}(f(r)) |f(r)| \right] - \mathrm{sgn}(f(r)) |f(r)|^{-1} \\
&= -\frac{r}{2} f(r)^{-2} \partial_r f(r) - f(r)^{-1} \\
&= A
\end{aligned}$$

よって，

$$\frac{\partial_r f(r)}{f(r)(Af(r)+1)} = -\frac{2}{r} \tag{15}$$

となるから，(16) の左辺は，

$$\frac{\partial_r f(r)}{f(r)(Af(r)+1)} = \left(\frac{1}{f(r)} - \frac{A}{Af(r)+1} \right) \partial_r f(r) \tag{16}$$

と表されるから，この積分は，

$$\ln |f(r)| - \ln |Af(r)+1| + C_1 = \ln \left| \frac{f(r)}{Af(r)+1} \right| + C_1 \tag{17}$$

一方右辺の積分は，$\ln r^{-2} + C_2$ だから，結局，

$$\frac{f(r)}{Af(r)+1} = \frac{\beta}{r^2} \tag{18}$$

これを解いて，

$$f(r) = \frac{1}{\dfrac{r^2}{\beta} - A}$$

を得る．ここで原点付近で空間が平坦だと仮定しよう，すると，計量が 3 次元ユークリッド空間の局座標表示時の計量，

$$d\ell^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + d\varphi^2)$$

に等しくならなければならないから，$g_{rr}(0) = f(0) = 1$ となることより，

$$1 = f(0) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\dfrac{r^2}{\beta} - A} = -\frac{1}{A}$$

より，$A = -1$ を得る．結局得られた式は，

$$f(r) = \frac{1}{1 + \dfrac{r^2}{\beta}}$$

となる．ここで，差し当たり β の値は空間の形状により異なるため正負も含め分からないが，通常 $K \equiv -\dfrac{1}{\beta}$ と置き，

$$f(r) = \frac{1}{1 - Kr^2}$$

と表す．結局得られた式は，

$$d\ell^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{19}$$

となる．これが一様等方空間を表す式である．

次に，この一様等方空間が時間発展する場合を考えよう．上で求めた一様等方空間の 3 次元不変間隔は，時間発展に伴い，全体のスケールが r や方向 θ, φ によらずに変化しても一様等方性を満たす．従って，時間発展する一様等方空間は一般に，

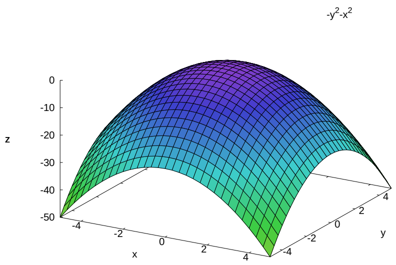
$$d\ell^2 = a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right] \tag{20}$$

と表されることになる．ここで，(19) 式と (20) 式での大きな違いに注意が必要だろう．(20) 式において，変数 r はもはや空間の膨張に従って変化する量ではなく，空間の膨張に従って変化するのは $a(t)r$ である．この二つの違いは，いわば格子模様の描かれたゴム膜の各点に書かれた数字を座標とするのが r であるのに対し，その各点の値にゴム膜の伸び率をかけたのが $a(t)r$ である．そこでこの r をスケールの膨張とともに基準となるものさし（＝スケール）が伸びる座標なので共動座標と呼び，$a(t)r$ を本来の座標という意味で固有座標と呼ぶ. ここで $a(t) \geq 0$ は空間の膨張の割合を表す成分なので，スケールファクターと呼ばれる．この空間の膨張まで考慮した 3次元不変間隔に対して，この空間上の位置を共動座標で測って静止している任意の観測者に対して時間の進むテンポがそれぞれ等しいことより，3 次元一様空間は次のような 4 次元時空に埋め込むことができる.

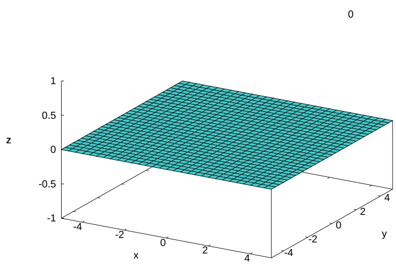
$$ds^2 = -c^2dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right] \tag{21}$$

この座標系の計量をロバートソン・ウォーカー計量 (RW 計量) と呼ぶ.

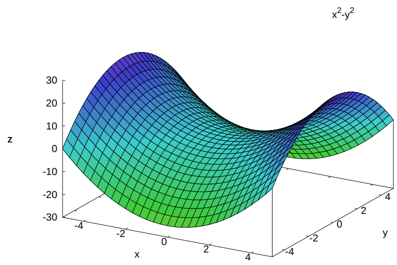
このときの空間の曲がり方を次元を一つ落として 3 次元ユークリッド空間に埋め込んだ 2 次元曲面として表すと次の図のようになる:



$K > 0$



$K = 0$



$K < 0$