

測地線の方程式のニュートン近似

測地線に沿って進む (=落下する) 自由粒子の座標に対する測地線の方程式は、

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

と表されるのであった。ここで (1) 式の物理的意味は、4 元速度ベクトルが測地線に沿って常に変化しない、つまり重力のみが働く状況下で、一定の初速度から自由落下しているような物体が静止しているように見える座標系が測地線の座標系であることを示していることになる。従って、ニュートン力学的極限では、重力ポテンシャル下での自由粒子に対する (ニュートン力学的) 運動方程式が得られるはずである。そこで次のような条件下で自由落下する物体のニュートン力学的運動方程式が再現される事を示そう。

条件 1 対象とする質点の近傍では (少なくともニュートン近似が出来るしばらくの間は) 重力場は非常に弱く、従ってミンコフスキー時空からあまりずれていないものとする。具体的には慣性系であれば上手く座標軸を取る事によって $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ と出来たわけだが、今考えている座標ではこのミンコフスキー時空からのずれが僅かしかないものとする。従って、2 次以上の項が無視できるとしてよいから、 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ かつ $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ としてよい。

条件 2 重力場は静的であるものとする。この条件は次の二つの条件からなる:

条件 a 重力場は時間変化しない。 $\therefore \partial_0 g_{\mu\nu} = 0$

条件 b 時間軸は空間座標軸と直交する。 $\therefore g_{i0} = g_{0i} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_i = 0$

条件 3 この質点を観測するこの座標系から見た質点の速度の 3 次元空間成分を $\mathbf{v} = u^i \mathbf{e}_i$ とすると、 $\|\mathbf{v}\| \ll c$

以上の条件下で議論を進めよう。まず、質点の固有時を τ とすると、測地線の式は次のようになるのであった:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad (1)$$

まずこの式の空間成分 $\mu = 1, 2, 3$ を考える。アインシュタインの規約により和を取っているところを一部展開すると、次のようになる。(但し、ギリシャ小文字は 0~3, アルファベット小文字は 1~3 を変域とする。)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} &= \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{00} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} + \Gamma^i_{j0} \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} + \Gamma^i_{0j} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} \\ &= \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + c^2 \Gamma^i_{00} + 2c \Gamma^i_{0j} u^j + \Gamma^i_{jk} u^j u^k \end{aligned}$$

ここで、接続係数を計量で表したときに現れる $g^{\mu\nu}$ を計算しやすいように $\eta^{\mu\nu}$ と $h_{\mu\nu}$ で表すことを考える。まず、 $h_{\mu\nu}$ の 2 次以上の項を無視する事により、

$$\begin{aligned} (\eta^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\alpha} \eta^{\sigma\beta} h_{\alpha\beta})(\eta_{\sigma\nu} + h_{\sigma\nu}) &= \eta^{\mu\sigma} \eta_{\sigma\nu} + \eta^{\mu\sigma} h_{\sigma\nu} - \eta^{\mu\alpha} \eta^{\sigma\beta} h_{\alpha\beta} \eta_{\sigma\nu} - \eta^{\mu\alpha} \eta^{\sigma\beta} h_{\alpha\beta} h_{\sigma\nu} \\ &\simeq \eta^{\mu\sigma} \eta_{\sigma\nu} + \eta^{\mu\sigma} h_{\sigma\nu} - \eta^{\beta\sigma} \eta_{\sigma\nu} \eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\beta} \\ &= \delta^\mu_{\nu} + \eta^{\mu\sigma} h_{\sigma\nu} - \delta^\beta_{\nu} \eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\beta} \\ &= \delta^\mu_{\nu} + \eta^{\mu\sigma} h_{\sigma\nu} - \eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\nu} \\ &= \delta^\mu_{\nu} \end{aligned}$$

が成り立っているが、

$$\begin{aligned} g^{\mu\sigma} (\eta_{\sigma\nu} + h_{\sigma\nu}) &= g^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu} \\ &= \delta^\mu_{\nu} \end{aligned}$$

であるから、結局、

$$g^{\mu\sigma} \simeq \eta^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\alpha} \eta^{\sigma\beta} h_{\alpha\beta}$$

が成り立っている事が分かる。ここで再び h に関して 2 次以上の項を無視すると、

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} &= \frac{1}{2}g^{\mu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \right) \\
&\simeq \frac{1}{2}(\eta^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\alpha}\eta^{\sigma\beta}h_{\alpha\beta}) \left(\frac{\partial h_{\sigma\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial h_{\sigma\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial h_{\beta\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \right) \\
&\simeq \frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma} \left(\frac{\partial h_{\sigma\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial h_{\sigma\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial h_{\beta\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \right)
\end{aligned}$$

が成り立つ。なお、最後の行で σ で和を取っているが、実際には $\eta^{\mu\nu}$ は対角成分以外は 0 なので、

$$\frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma} \left(\frac{\partial h_{\sigma\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial h_{\sigma\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial h_{\beta\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \right) = \frac{1}{2}\eta^{\mu\mu} \left(\frac{\partial h_{\mu\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial h_{\mu\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial h_{\beta\alpha}}{\partial x^{\mu}} \right)$$

としたいところだが、ここでは、上下の添字に μ が現れるので、アインシュタインの規約により μ で和を取ってしまう事になる。ここは少々まどろっこしいが致し方なかるう (実は、ここの表記は私も間違えた (笑))。さてここで、 $g_{oi}(x) = \eta_{0i} + h_{0i}(x) = h_{0i}(x) = 0$ が成り立っていること及び、条件 2-a より、

$$\begin{aligned}
\Gamma_{0j}^i &= \frac{1}{2}\eta^{i\sigma} \left(\frac{\partial h_{\sigma 0}}{\partial x^j} + \frac{\partial h_{\sigma j}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{j0}}{\partial x^{\sigma}} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

一方、

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^i &= \frac{1}{2}\eta^{i\sigma} \left(\frac{\partial h_{\sigma 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial h_{\sigma 0}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{00}}{\partial x^{\sigma}} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}
\end{aligned}$$

より、こちらは 0 とならないことに注意しよう。また、4 元速度の 3 次元空間成分についても、条件 3 より 2 次以上の項は無視できるから、結局 (1) 式は、

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} - \frac{1}{2}c^2 \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} = 0 \quad (2)$$

に帰着する事になる。ニュートンの運動方程式に似た 3 次元空間座標成分の固有時の 2 階微分と重力を空間の曲がり方で記述した計量だけからなる項のみが残り、だいぶ期待する形に近くなった。ここからニュートンの式に変形するためには固有時が邪魔である。しかしここで、無限小線素 ds と $d\tau$ の間に $d\tau^2 = -\frac{1}{c^2}ds^2$ の関係があることより、

$$\begin{aligned}
d\tau^2 &\stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{c^2}ds^2 \\
&= -\frac{1}{c^2}g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} \\
&= -\frac{1}{c^2}g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{dt}\frac{dx^{\nu}}{dt}dt^2
\end{aligned}$$

となり、 $g_{i0} = g_{0i} = 0$ 及び v^i の 2 次以上の項が無視できる事より、

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{dt}\frac{dx^{\nu}}{dt} &= g_{00}\frac{dx^0}{dt}\frac{dx^0}{dt} + g_{0i}\frac{dx^0}{dt}\frac{dx^i}{dt} + g_{i0}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^0}{dt} + g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} \\
&= (\eta_{00} + h_{00})\frac{dx^0}{dt}\frac{dx^0}{dt} + (\eta_{ij} + h_{ij})\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} \\
&= (-1 + h_{00})\frac{dx^0}{dt}\frac{dx^0}{dt} + (\delta_{ij} + h_{ij})\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} \\
&= (-1 + h_{00})c^2 + (\delta_{ij} + h_{ij})v^i v^j \\
&\simeq (-1 + h_{00})c^2
\end{aligned}$$

となるから、結局、

$$\begin{aligned}
d\tau^2 &= -\frac{1}{c^2}(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}dt^2 \\
&= -\frac{1}{c^2}(-1 + h_{00})c^2dt^2 \\
&= (1 - h_{00})dt^2 \\
&\simeq dt^2 \\
\therefore d\tau &\simeq dt
\end{aligned}$$

となることが分かる。(但し $|h_{00}| \ll 1$ を用いた) これより (2) 式は (従って (1) 式も),

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} - \frac{1}{2}c^2\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} = 0 \quad (3)$$

となることが分かった。さてこの式をニュートンの運動方程式と比べてみよう。重力下で自由落下する質点に対するニュートンの運動方程式は、重力ポテンシャルを ϕ_G とすると,

$$\mathbf{F} = m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -m\nabla\phi_G$$

となる。これを成分で表すと,

$$F^i = m\frac{d^2x^i}{dt^2} = -m\frac{\partial\phi_G}{\partial x^i} \quad (4)$$

となる。一方 (3) は、第 2 項を右辺に移項して、両辺に m を掛けてやると,

$$m\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{1}{2}mc^2\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \quad (5)$$

この (4) 式と (5) 式を見比べると,

$$\phi_G = -\frac{1}{2}c^2h_{00}$$

のとき、両者は完全に一致する事が分かる。