計量の導入

特殊相対論が適用できる状況において, 2 点間の微小距離に対応する値 ds は座標変換によって不変であり,

$$(ds)^2 = -(dw)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

と慣性系の選び方に寄らずに表される. これは, $w = X^0$, $x = X^1$, $y = X^2$, $z = X^3$ とし,

$$\eta_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$(ds)^2 = \quad \eta_{ij} dX^i dX^j \tag{1}$$

と表される. このとき, η_{ij} をミンコフスキー計量と呼ぶ.

次に一般に重力場があるとき, 2 点間の微小距離 ds がどういう形式で定義されるか考えてみよう. 物体が自由落下する系 (これを O とおく) を選べば, 常に局所的に特殊相対論が成り立つ. このとき, 問題の 2 点を系 O のデカルト座標で計測した位置を X, $X + dX$ とすれば, 当然のことながら, (1) が成り立つ. そこで今度は一般の座標系 o から見た場合にその座標 x, $x + dx$ によって ds がどう表されるか考えて見よう. o から O への座標変換が,

$$X^i = f^i(x)$$

と表されていたとする. すると,

$$dX^i = \frac{\partial f^i}{\partial x^k} dx^k$$

と表される事になる. 従ってこれを (1) に代入する事により,

$$(ds)^2 = \quad g_{ij} dx^i dx^j \tag{2}$$

の形式で常に表される事が分かる. (2) は任意の座標系で 2 点間の微小距離を求める式を表すと考えられるので, g_{ij} によって空間の幾何学的性質が異なることが分かる. これを計量テンソルと呼ぶ. なお, 当然ではあるが, 通常 $dx^i dx^j = dx^j dx^i$ としてよいから同じ項に対して 2 つの係数, g_{ij}及び g_{ji} が存在する事になる. $g_{ij} = g_{ji}$ とすれば g_{ij} は対称行列となり便利なので, 通常計量テンソルとしては計量を対称行列となるように取ったもので定義する.

計量が 2 階の共変テンソルになることの証明

次に, このようにして定義した計量が 2 階の共変テンソルになることを示す.

g_{ij} と $\bar{g}_{ij}$ をそれぞれ座標系 o と $\bar{o}$ の計量とし, この二つの座標系は, $x^i = f^i(\bar{x})$ によって座標変換されるものとする. このとき,

$$(ds)^2 = g_{ij}dx^i dx^j, \tag{3}$$

$$(ds)^2 = \bar{g}_{ij}d\bar{x}^i d\bar{x}^j, \tag{4}$$

が成り立っている. そこで $x^i = f^i(\bar{x})$ の両辺を全微分すると,

$$dx^i = \frac{\partial f^i}{\partial \bar{x}^k}d\bar{x}^k = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}d\bar{x}^k \tag{5}$$

が得られるので, (5) を (3) に代入すると,

$$\begin{aligned}
\bar{g}_{ij}d\bar{x}^i d\bar{x}^j &= (ds)^2 \\
&= g_{ij}dx^i dx^j \\
&= g_{ij}\left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^m}d\bar{x}^m\right)\left(\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^n}d\bar{x}^n\right) \\
&= \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^n}g_{ij}d\bar{x}^m d\bar{x}^n \\
&= \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}g_{kl}d\bar{x}^i d\bar{x}^j
\end{aligned}$$

よって,

$$\left(\bar{g}_{ij} - \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}g_{kl}\right)d\bar{x}^i d\bar{x}^j = 0$$

が恒等式になることより,

$$\bar{g}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}g_{kl} \tag{6}$$

が導かれる. (6) は g_{kl} が 2 階の共変テンソルである事を示す.