自由粒子の運動が固有時間を最大にする経路をとることの直感的説明

ニュートン力学において，いかなる外力も受けずに運動する質点の運動は当然直線になる．そしてここでいう直線とは，3 次元ユークリッド空間を結ぶ最短の経路であった．それに対し，特殊相対論においては，外力を受けずに運動する質点の運動は 4 次元ミンコフスキー時空上の直線となる経路を運動するという形で対応する．そしてそれは時空上の 2 点を固有時が最大になるように運動することを意味する．ここで直線が直線に対応すると言うのは、いかにも明らかで疑問の余地がないようであるが，固有時が最大というのは一見すると分からないかもしれない．2 点間を結ぶ最短経路だから最短時間じゃないのか？ という声が聞こえてきそうである．ここではユークリッド空間の最短経路に対応する事が，何故、特殊相対論においては，固有時を最大化する経路となるのかを直感的に説明する．ユークリッド空間での最短距離が直線になるというのが直感的に明らかなように．

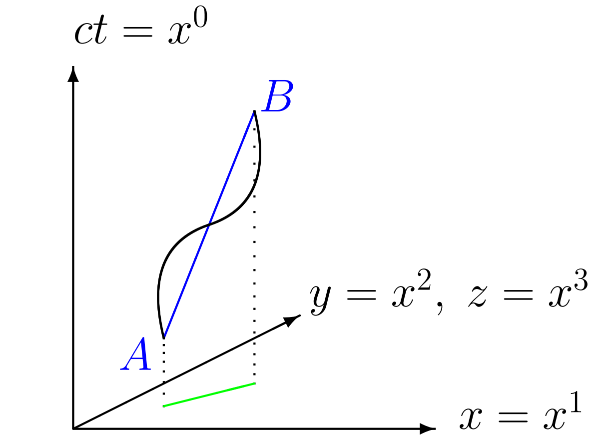

図 1: 質点の経路

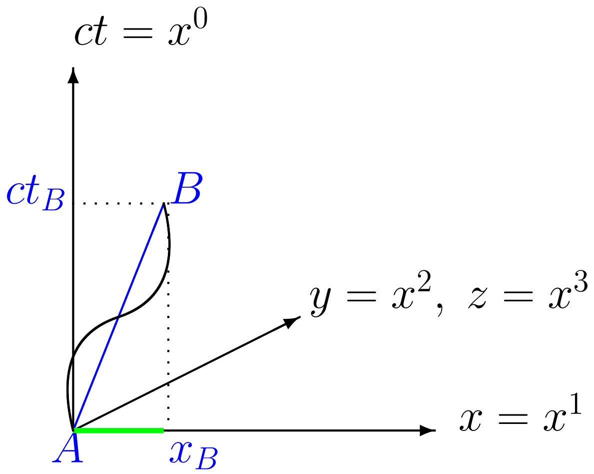

図 2: 座標変換後

図 1 はある慣性系において時間的な時空上の 2 点 A，B を運動する質点の経路を表したものである．ただし，4 次元時空は紙に描けないので，y, z 軸方向は 1 次元に落としてある．見れば分かるとおり運動方向と座標軸の取り方を変えればもっと簡単に表現できるであろう．そこで A 点を原点とするように時間と空間の原点をとり，さらにベクトル $\overrightarrow{AB}$ が $x - ct$ 平面内に収まるように座標回転を行おう．

座標変換を行った結果は図 2 のようになる．かなり分かりやすくなったがまだ改善の余地が有る．今，質点の運動の経路は分からないが，A，B 間の移動に，座標時間で ct_B かかっている事が分かる．これより平均速度は，

$$\overline{v} = \frac{x_B}{t_B}$$

となるから，速度 $\overline{v}$ で x 軸正の向きに運動する座標系から見れば A 点と B 点は空間的には同一の点となる．そこでローレンツ変換

$$X = \gamma(x - \beta ct),\ cT = \gamma(ct - \beta x)$$

$$\left(\text{ただし，} \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\overline{v}/c)^2}},\ \beta = \frac{\overline{v}}{c}\right)$$

を施してやると，

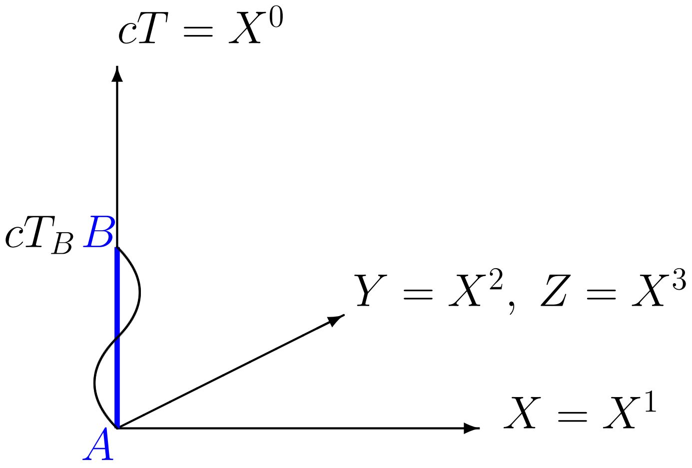

図 3: ローレンツ変換後

図 3 のとおり，今や始点 A と終点 B は空間的には同一の点となった．従って次のことが言えるであろう．空間座標の原点でじっと止まっている場合，質点の固有時は座標時間と同じ cT_B になる．それに対し，もし質点がふらふらと移動しながら，座標時間が cT_B のときに空間座標の原点に戻ってくるような経路をとったとしよう．すると，この運動により座標時間で cT_B のときに戻ってきた質点の時計は座標原点の時間より遅れているはずである．従ってこの質点の運動にあわせた座標での固有時は，常に空間座標の原点で静止している質点の固有時より小さくなっている事になる．従って，静止している質点の固有時は始点と終点を同一の点とするあらゆる経路での固有時より常に大きい事になる．さらに，固有時は座標変換で不変な量だから，結局図 1 の状況で空間内を等速度で移動する経路がもっとも固有時が大きい経路である事が分かる．ニュートン力学とほぼ同じように外力が働かない質点の経路が正にそれなのだから，これは，「特殊相対論では外力の働かない自由粒子の進む軌道は，始点と終点を繋ぐあらゆる経路のうち最も固有時が大きくなる経路であり，それが等速度（従って直線軌道）で始点から終点まで移動する経路である.」ということを意味する．