ブラックホールの数学理論

目次

第 1 章

数学的準備

1.1 はじめに

この章では，この本で紹介する多くの発展的話題の基礎となる解析的手法の計算を準備する．これらは微分形式の Cartan 代数と 4 つ組と Newman-Penrose 形式からなる．これらの概念のいずれもがそれ自体特別なものでないにもかかわらず，それら全ては同じところで一緒のなかでみつけることはできない．そしてその計算はこの本の中で可能な限り自己完結するために含まれている．しかし §§2-6 で表現される微分幾何の要素においては，他の場所における主題の標準的な計算方法に置き換えることを意図したものではなく，その表現は構造の Cartan 方程式のむき出しの本質的な導出のみに制限されている．

1.2 微分幾何の要素

微分幾何は多様体を扱う．多様体は本質的に局所的にユークリッド的空間であることを最初に押さえておこう．

n 次元のユークリッド空間 $\mathbb{R}_n$ は，普通の方法で定義された n タプル $(x^1, \dots, x^n)(-\infty < x^i < +\infty)$ からなる全ての開集合・閉集合 (或いは近傍を含む集合) であることを思い出そう．多様体 M は覆われている近傍 $\mathscr{U}_\alpha$ であり，そして各々の $\mathscr{U}_\alpha$ に対して各点 $p \in \mathscr{U}_\alpha$ を $\mathbb{R}_n$ の開近傍の点 $(x^1, \dots, x^n)$ に写像する 1 対 1 写像 ϕ_α を持つという意味において局所的にユークリッド空間と同型である．さらにいえば，もし 2 つの M の近傍 $\mathscr{U}$ と $\mathscr{V}$ が共通部分の点を持ち $(\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{V}_\alpha \neq 0)$，$\phi_\alpha$ と ψ_α がそれらに対応した $\mathbb{R}_n$ の近傍への写像とするとき，写像 $\phi_\alpha \circ \psi^{-1}$ は座標 $(x^1, \dots, x^n)$ を持つ点 $\psi_\alpha(p)(p \in \mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{V}_\alpha)$ を座標 $(\overline{x}^1, \dots, \overline{x}^n)$ を持つ点 $\phi_\alpha(p)$ に写すから，M の定義の一部より，$x^i(i = 1, \dots, n)$ は $(\overline{x}^1, \dots, \overline{x}^n)$ の滑らかな関数であることが要求される (滑らかな関数とは全ての階で連続な偏導関数を持つものである)．

2 つの多様体 M, N の順序対 (Cartesian 積)$M \times N$ は，$p \in M$, $q \in N$ からなる順序付けられた組，点 (p, q) 達からなる．もっといえば，$\mathscr{U}_\alpha$ と $\mathscr{V}_\alpha$ が M と N の近傍で ϕ_α と ψ_β がそれらに対応する写像で $\phi_\alpha(p) = (x^1, \dots, x^n,$ $\psi_\beta(q) = (y^1, \dots, y^n)$($n$ と m は等しくなくても良い) とすると，写像

$$(\phi_\alpha \times \psi_\beta)(p, q) = (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$$

は，$M \times N$ を $m + n$ 次元の多様体として充分定義できる．

ここで M 上の関数 $f : M \to \mathbb{R}^1$ を考えよう．いま，$\mathbb{R}^n$ の点 $(x^1, \dots, x^n)$ を実数 $\mathbb{R}^1$ に写す連結された写像 $f \circ \phi_\alpha^{-1}$ が座標 $(x^1, \dots, x^n)$ の滑らかな関数であると仮定しよう．M 上の滑らかな曲線 λ を次の写像で定義する．

$$\lambda : \text{区間 } I(a < t < b) \subset \mathbb{R}^1 \to \lambda(t) = p \in M$$

ここで，

$$(\phi_\alpha \circ \lambda)(t) = [x^1(t), \dots, x^n(t)]; \tag{1.1}$$

そして $x^i(t)(i = 1, \ldots, n)$ は t の滑らかな関数であることを要求する． 結局，多様体上で定義された関数 f は，曲線 λ 上の関数 $f \circ \lambda$ を定義することを可能にすることに注意しよう． 写像 $\phi_\alpha \circ \lambda$ の助けによって，関数 $f(\lambda(t)) = f(x^1(t), \ldots, x^n(t))$ を考察することができるようになった．ただし，$(x^1(t), \ldots, x^n(t))$ は写像 ϕ_α による $p = \lambda(t)$ の座標を表す．

1.2.1　接ベクトル

いま与えた M 上の曲線 λ 上の $f(x^1(t), \ldots, x^n(t))$ の定義によって，

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\lambda(t)}\bigg|_{t=t_0} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left\{f(\lambda(t_0+\varepsilon)) - f(\lambda(t_0))\right\} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{dx^j(t)}{dt}\bigg|_{t_0}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)_{\lambda(t_0)} = \left(\frac{dx^j}{dt}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)_{t_0}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

を考えよう．なお，最後の式変形で繰り返される添字について和をとることが仮定されている (この和についての規約はこの本全体を通して採用される)．

いま，与えられた点 P を通過するさまざまな曲線 λ を考えることによって，座標微分 $\dfrac{\partial}{\partial x^j}$ の線形結合からなる形式，

$$\boldsymbol{X} = X^j\frac{\partial}{\partial x^j} \tag{1.3}$$

によって，(点 p の) 線形ベクトル空間を定義できることが明らかとなった．ここで X^j は任意の n 組の数である．

これら接ベクトルは

$$x^j(t) = x^j(p) + X^j t, \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{1.4}$$

によって定義される曲線 λ を考えることによって起きる*1．ここで t は微小区間 $-\varepsilon < t < +\varepsilon$ に含まれる．線形ベクトル空間としての要求によって，点 p の接ベクトルは座標微分によって $\mathbb{R}^1$ 上への線形ベクトル空間をなし，

$$(\alpha\boldsymbol{X} + \beta\boldsymbol{Y})f = \alpha(\boldsymbol{X}f) + \beta(\boldsymbol{Y}f) \tag{1.5}$$

が全てのベクトル $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ と数 α, β，関数 f について成り立つ．さらにいえば，ベクトル $\left(\dfrac{\partial}{\partial x^j}\right)_p$ 達は互いに線形独立である．もしそうでなければ，全ての j で $X^j = 0$ とはならない $X^j(j = 1, \ldots, n)$ が存在して，$\boldsymbol{X} = X^j\dfrac{\partial}{\partial x^j}$ を任意の滑らかな関数に適用するとゼロ (演算子) に等しいが，$\boldsymbol{X}$ を座標関数 $x^k(k = 1, \ldots, n)$ に適用すると，全ての k に対して $X^k = 0$ を導く．これは矛盾である*2．結局，X の定義

$$\boldsymbol{X}f = X^j\frac{\partial f}{\partial x^j} = X^j f_{,j} \tag{1.6}$$

をどんな滑らかな関数 f に適用しても，関数の積に作用させると明らかにライプニッツ則を満たす．したがって

$$\boldsymbol{X}(fg)|_{\lambda(t)} = (f\boldsymbol{X}g + g\boldsymbol{X}f)|_{\lambda(t)} \tag{1.7}$$

である．

---

*1 $\dfrac{dx^j}{dt} = \lim_{t\to 0}\dfrac{x^j(t) - x^j(p)}{t} = X^j$

*2 $X^j\dfrac{\partial}{\partial x^j} = 0, \therefore X^j\dfrac{\partial x^k}{\partial x^j} = X^j\delta^k_j = X^k = 0$

接ベクトルは実際，方向微分と考えられる (式 (1.6) において，共に下に書いたコンマと，それに続く文字 j によって x^j に関する微分を意味する記法を導入した).

n 次元多様体 M の点 p の接ベクトル (または反変ベクトルとも呼ばれる) の空間は $T_p(M)$ または単に T_p と記し，n 次元ベクトル空間である．この空間は，p の接空間と呼ばれ，点 p の全ての”方向”の集合として表すことができるだろう．

局所座標によって基底を決める代わりに，我々はそれ以外の任意な n 個の線形独立なベクトル $\boldsymbol{e}_a(a = 1, \ldots, n)$ を選ぶこともできる．すると，次の形の線形関係

$$\boldsymbol{e}_a = \Phi_a{}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{1.8}$$

が存在し，$\Phi_a{}^k$ によって構成される行列の行列式はゼロでないことが必要である．したがって逆関係は,

$$\frac{\partial}{\partial x^j} = \Phi^b{}_j \boldsymbol{e}_b \tag{1.9}$$

によって与えられる．ここで $[\Phi^b{}_j]$ は $[\Phi_a{}^k]$ の逆行列である:

$$\Phi_a{}^k \Phi^a{}_j = \delta^k_j \text{かつ} \Phi_a{}^k \Phi^b{}_k = \delta_a{}^b. \tag{1.10}$$

与えられた任意の基底によって，任意の点 p の接ベクトル

$$\boldsymbol{X} = X^j \boldsymbol{e}_j \tag{1.11}$$

を表現できる．ここで X^j は基底 $(\boldsymbol{e}_j)$ に関連した X の成分である．

1.2.2　1-形式 (または余接或いは共変ベクトル)

p の 1-形式は，接空間 T_p から実数への全射となる線形写像である．

$$\omega : T_p \to \mathbb{R}^1 \tag{1.12}$$

いいかえると p の任意の与えられた接ベクトル $\boldsymbol{X}$ に対して，1-形式 ω は数 $\omega(\boldsymbol{X})$ に単一に結びつける．これは次のようにも書かれる．

$$\omega(\boldsymbol{X}) = \langle \omega, \boldsymbol{X} \rangle \tag{1.13}$$

この写像の要求される線形性は次の関係で表現される．

$$\langle \omega, \alpha\boldsymbol{X} + \beta\boldsymbol{Y} \rangle = \alpha\langle \omega, \boldsymbol{X} \rangle + \beta\langle \omega, \boldsymbol{Y} \rangle, \tag{1.14}$$

ここで $\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ は任意の 2 つの接ベクトルで α と β は，任意の 2 つの実数である．我々はさらに任意の $\boldsymbol{X} \in T_p$ と任意の実数に対するこの規則によって実数と形式の和と形式の積を定義する．

$$(\alpha\omega)(\boldsymbol{X}) = \alpha\langle \omega, \boldsymbol{X} \rangle \text{ かつ } (\omega + \pi)(\boldsymbol{X}) = \langle \omega, \boldsymbol{X} \rangle + \langle \pi, \boldsymbol{X} \rangle \tag{1.15}$$

ここで ω と π は 2 つの 1-形式である．これらの規則によって，1-形式は我々が T_p^* で記したベクトル空間をはしることになる．これは p の余接空間と呼ばれ接空間の双対である．この理由により 1-形式は余接ベクトル (または共変ベクトル) とも呼ばれる．

我々はいまから T_p の基底 (e_j) に随伴した T_p^* の基底は，任意の接ベクトル $\boldsymbol{X} = X^j \boldsymbol{e}_j$ をその成分に写像する 1-形式によって提供されることを確かめよう．そこで,

$$\boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{X}) = \langle \boldsymbol{e}^i, X^j \boldsymbol{e}_j \rangle = X^i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.16}$$

と置く．すると，この最後の式より次が得られる:

$$\boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{e}_j) = \langle \boldsymbol{e}^i,\, \boldsymbol{e}_j \rangle = \delta^i{}_j. \tag{1.17}$$

どんな任意の 1-形式 ω の表現も，次のことに注意することによって $\boldsymbol{e}^i$ 達の線形結合として得られる．

$$\langle \boldsymbol{\omega},\, \boldsymbol{X} \rangle = \langle \boldsymbol{\omega}, X^i \boldsymbol{e}_i \rangle = X^i \langle \boldsymbol{\omega},\, \boldsymbol{e}_i \rangle \tag{1.18}$$

いま,

$$\omega_i = \langle \boldsymbol{\omega},\, \boldsymbol{e}_i \rangle = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{e}_i) \tag{1.19}$$

は，$\boldsymbol{\omega}$ が p の接空間の基底ベクトル (e_i) を写像する数であり,

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\omega},\, \boldsymbol{X} \rangle &= \omega_i X^i = \omega_i \langle \boldsymbol{e}^i,\, X^j \boldsymbol{e}_j \rangle \\ &= \langle \omega_i \boldsymbol{e}^i,\, \boldsymbol{X} \rangle \end{aligned} \tag{1.20}$$

と書くことができる．この最後の式が任意の $\boldsymbol{X} \in T_p$ について有効であることより,

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_i \boldsymbol{e}^i; \tag{1.21}$$

が成り立ち，$\boldsymbol{e}^i$ 達の線形結合で表された $\boldsymbol{\omega}$ の表現はこれを満たすことが要求される．ベクトル $\boldsymbol{e}^i$ 達はその定義より明らかに線形独立である．基底 $(\boldsymbol{e}_i)$ と $(\boldsymbol{e}^i)$ は点 p の接空間と余接空間の双対基底を提供する．

もし，双対基底 $(\boldsymbol{e}_i)$ と $(\boldsymbol{e}^j)$ によるなら，我々は，$\Phi_{i'}^{\,j}$ と $\Phi^{j'}_{\;i}$ によって表現される特異的でない線形変換によって得られる異なる基底,

$$\boldsymbol{e}_{i'} = \Phi_{i'}^{\,j} \boldsymbol{e}_j \quad と \boldsymbol{e}^{j'} = \Phi^{j'}_{\;j} \boldsymbol{e}^j, \tag{1.22}$$

を選ぶべきであろう．すると，新しい基底 $(\boldsymbol{e}_{i'})$ と $(\boldsymbol{e}^{j'})$ が引き続き双対であるための条件として,

$$\begin{aligned} \delta^{j'}_{\;i'} = \langle \boldsymbol{e}^{j'},\, \boldsymbol{e}_{i'} \rangle &= \Phi^{j'}_{\;j} \Phi_{i'}^{\,k} \langle \boldsymbol{e}^j,\, \boldsymbol{e}_k \rangle \\ &= \Phi^{j'}_{\;j} \Phi_{i'}^{\,k} \delta^j_{\;k} = \Phi^{j'}_{\;j} \Phi^j_{\;i'}; \end{aligned} \tag{1.23}$$

いいかえると，行列 $[\Phi_{i'}^{\,i}]$ と $[\Phi^{j'}_{\;j}]$ は他方の逆行列となっている．結局，1 組の局所座標 (x^i) を別の組 $(x^{i'})$ に換えるとき，対応する $\Phi_{i'}^{\,i}$ と $\Phi^{j'}_{\;j}$ の表現は,

$$\Phi_{i'}^{\,i} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \right)_p と \Phi^{j'}_{\;j} = \left(\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \right)_p \tag{1.24}$$

になることに注意しよう[*3]．この多様体上の任意の関数 f に関して，1-形式 df は,

$$df(\boldsymbol{X}) = \langle df,\, \boldsymbol{X} \rangle = \boldsymbol{X} f \tag{1.25}$$

を任意のベクトル $\boldsymbol{X} \in T_p$ に対して満たすように定義すべきである．局所座標基底

$$\boldsymbol{X} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}; \tag{1.26}$$

において，定義より,

$$\langle df,\, \boldsymbol{X} \rangle = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = X^i f_{,i}; \tag{1.27}$$

[*3] $\dfrac{\partial}{\partial x^{i'}} = \Phi_{i'}^{\,j} \dfrac{\partial}{\partial x^j} \therefore \dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = \Phi_{i'}^{\,j} \dfrac{\partial x^i}{\partial x^j} = \Phi_{i'}^{\,j} \delta^i_j = \Phi_{i'}^{\,i}$

特に

$$\langle dx^j,\, \frac{\partial}{\partial x^i}\rangle = \delta^j_{\ i}; \tag{1.28}$$

が成り立つ．それ故 1-形式 (dx^j) は接空間の接ベクトル $\partial_j = \dfrac{\partial}{\partial x^j}$ によって提供される局所座標基底と双対をなす余接ベクトルの局所座標基底を提供する．基底 (∂_j) と (dx^j) はしばしば接空間と余接空間の正規基底として参照される．ここでもし,

$$df = \alpha_j dx^j \tag{1.29}$$

であるとき,

$$X^i f_{,\,i} = \langle df,\, \boldsymbol{X}\rangle = \langle \alpha_j dx^j,\, X^i \partial_i\rangle \tag{1.30}$$

$$= \alpha_j X^i \langle dx^j,\, \partial_i\rangle = \alpha_i X^i \tag{1.31}$$

が成り立つ．したがって

$$\alpha_i = f_{,\,i}, \qquad df = f_{,\,i} dx^i; \tag{1.32}$$

である．そしてこの最後の式は慣習的な意味での df と矛盾しない．

1.2.3　テンソルとテンソル積

$$\Pi^s_{\ r} = \underbrace{\mathrm{T}^*_{\ p} \times T^*_{\ p} \times \cdots \times T^*_{\ P}}_{r\ 個} \underbrace{\times T_p \times T_p \times \cdots \times T_p}_{s\ 個}, \tag{1.33}$$

は多様体のある点 p での r 個の余接空間と s 個の接空間の順序対 (Cartesian 積) を表現する．つまり順序付けられた r 個の 1-形式と，s 個の接ベクトル $(\omega^1,\, \ldots,\, \omega^r,\, X_1,\, \ldots,\, X_s)$ 達からなる空間である．そこで多様体 $\Pi^s_{\ r}$ から実数への多重線形写像 T を考えよう:

$$T : \Pi^s_{\ r} \to \mathbb{R}^1 \tag{1.34}$$

より正確にはこの写像は実数への任意の与えられた r 個の 1-形式と s 個の接ベクトルからなる順序対を関連付ける．この写像が多重線形である条件は,

$$\begin{aligned} &T(\boldsymbol{\omega^1},\, \ldots,\, \boldsymbol{\omega^r},\, \alpha\boldsymbol{X} + \beta\boldsymbol{Y},\, \boldsymbol{X}_2,\, \ldots,\, \boldsymbol{X}_s) \\ &= \alpha T(\boldsymbol{\omega}^1,\, \ldots,\, \boldsymbol{\omega}^r,\, \boldsymbol{X},\, \boldsymbol{X}_2,\, \ldots,\, \boldsymbol{X}_s) + \beta T(\boldsymbol{\omega}^1,\, \ldots,\, \boldsymbol{\omega}^r,\, \boldsymbol{Y},\, \boldsymbol{X}_2,\, \ldots,\, \boldsymbol{X}_s) \end{aligned} \tag{1.35}$$

が任意の $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}^1$ と $X,\, Y \in T_p$ および全ての形式とベクトルの置き換えでもこれが成り立つことが必要である．そのように定義された多重線形写像は型 (type)$(r,\, s)$ のテンソルと呼ばれる．与えられた型 $(r,\, s)$ のテンソルの線形結合は,

$$(\alpha T + \beta S)(\boldsymbol{\omega}^1,\, \ldots,\, \boldsymbol{\omega}^r,\, \boldsymbol{X}_1,\, \ldots,\, \boldsymbol{X}_s) = \alpha T(\boldsymbol{\omega}^1,\, \ldots,\, \boldsymbol{\omega}^r,\, \boldsymbol{X}_1,\, \ldots,\, \boldsymbol{X}_s) + \beta S(\boldsymbol{\omega}^1,\, \ldots,\, \boldsymbol{\omega}^r,\, \boldsymbol{X}_1,\, \ldots,\, \boldsymbol{X}_s) \tag{1.36}$$

という規則が全ての $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}^1,\, \boldsymbol{\omega}^i \in T^*_p,\, \boldsymbol{X}_j \in T_p\ (i = 1,\, \ldots,\, r;\ j = 1,\, \ldots,\, s)$ について成り立つことによって定義される．これらの規則によって，与えられた型 $(r,\, s)$ のテンソルは，n^{r+s} 次元の線形ベクトル空間をはしる．そして

そのようなテンソル達の空間はテンソル積の空間と呼ばれ*4,

$$T^r_s(p) = \underbrace{T_p \otimes \cdots \otimes T_p}_{r\text{ 個}} \otimes \underbrace{T_p^* \otimes \cdots \otimes T_p^*}_{s\text{ 個}} \tag{1.37}$$

と記される.

我々はいまから, n^{r+s} 個の特別な写像,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_{i_1,\,\dots,\,i_r}{}^{j_1,\,\dots,\,j_s}(\boldsymbol{\omega}^1,\,\dots,\,\boldsymbol{\omega}^r,\,\boldsymbol{X}_1,\,\dots,\,\boldsymbol{X}_s) &= e_{i_1,\,\dots,\,i_r}{}^{j_1,\,\dots,\,j_s}(\omega^1_{k_1}\boldsymbol{e}^{k1},\,\dots,\,\omega^r_{k_r}\boldsymbol{e}^{k_r},\,X_1^{l_1}\boldsymbol{e}_{l_1},\,\dots,\,X_s^{l_s}\boldsymbol{e}_{l_s}) \\ &= \omega^1_{i_1}\cdots\omega^r_{i_r}X_1^{j_1}\cdots X_s^{j_s} \end{aligned} \tag{1.38}$$

によって提供される型 $(r,\,s)$ のテンソル積の基底を確かめよう. これらの写像は, 型 $(r,\,s)$ の全ての独立変数 (引数) とテンソルたちに対して明らかに線形である. これらの写像の同値な定義は,

$$\boldsymbol{e}_{i_1,\,\dots,\,i_r}{}^{j_1,\,\dots,\,j_s}(\boldsymbol{e}^{k_1},\,\dots,\,\boldsymbol{e}^{k_r},\,\boldsymbol{e}_{l_1},\,\dots,\,\boldsymbol{e}_{l_s}) = \delta^{k_1}_{i_1}\cdots\delta^{k_r}_{i_r}\delta^{j_1}_{l_1}\dots\delta^{j_s}_{l_s} \tag{1.39}$$

となる.

任意の型 $(r,\,s)$ のテンソルは写像 (1.39) の線形結合,

$$\begin{aligned}T(\boldsymbol{\omega}^1,\,\dots,\,\boldsymbol{\omega}^r,\,\boldsymbol{X}_1,\,\dots,\,\boldsymbol{X}_s) &= T(\omega^1_{i_1}\boldsymbol{e}^{i_1},\,\dots,\,\omega^r_{i_r}\boldsymbol{e}^{i_r},\,X_1^{j_1}\boldsymbol{e}_{j_1},\,\dots,\,X_s^{j_s}\boldsymbol{e}_{j_s}) \\ &= \omega^1_{i_1}\cdots\omega^r_{i_r}X_1^{j_1}\cdots X_s^{j_s}T(\boldsymbol{e}^{i_1},\,\dots,\,\boldsymbol{e}^{i_r},\,\boldsymbol{e}_{j_1},\,\cdots,\,\boldsymbol{e}_{j_s})\end{aligned} \tag{1.40}$$

によって表され,

$$T(\boldsymbol{e}^{i_1},\,\dots,\,\boldsymbol{e}^{i_r},\,\boldsymbol{e}_{j_1},\,\dots,\,\boldsymbol{e}_{j_s}) = T^{i_1,\,\dots,\,i_r}{}_{j_1,\,\dots,\,j_s} \tag{1.41}$$

と置くことによって,

$$T = T^{i_1,\,\dots,\,i_r}{}_{j_1,\,\dots,\,j_s}\boldsymbol{e}_{i_1,\,\dots,\,i_r}{}^{j_1,\,\dots,\,j_s} \tag{1.42}$$

と書くことができる. そしてこれが写像 (1.39) の要求される線形結合である T の表現である. 写像 (1.39) 達が線形独立であることは明らかである. それ故それらは, 型 $(r,\,s)$ のテンソルの基底を提供する. これらの基底の要素 $\boldsymbol{e}_{i_1,\,\dots,\,i_r}{}^{j_1,\,\dots,\,j_s}$ の数は n^{r+s} である. (これは T^r_s の次元である)

展開 (1.42) の係数 $T^{i_1,\,\dots,\,i_r}{}_{j_1,\,\dots,\,j_s}$ は選んだ基底に関する T の成分と呼ばれる.

一般に,

$$\boldsymbol{e}_{i_1,\,\dots,\,i_r}{}^{j_1,\,\dots,\,j_s} = \boldsymbol{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{i_r}\otimes\boldsymbol{e}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}^{j_s} \tag{1.43}$$

と書いて T_p と T_p^* の双対な基底 $(\boldsymbol{e}_i)$ と $(\boldsymbol{e}^j)$ に対するテンソル積を表現できる. この記法によって r 個の接ベクトルと s 個の 1-形式からなる,

$$\boldsymbol{Y}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{Y}_r\otimes\boldsymbol{\Omega}^1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\Omega}^s \tag{1.44}$$

は $(\boldsymbol{\omega}^1,\,\dots,\,\boldsymbol{\omega},\,\boldsymbol{X}_1,\,\dots,\boldsymbol{X}_s)$ を数,

$$\langle\boldsymbol{\omega}^1,\,\boldsymbol{Y}\rangle\cdots\langle\boldsymbol{\omega}^r,\,\boldsymbol{Y}_r\rangle\langle\boldsymbol{\Omega}^1,\,\boldsymbol{X}_1\rangle\cdots\langle\boldsymbol{\Omega}^s,\,\boldsymbol{X}_s\rangle \tag{1.45}$$

*4 $T^r_s := \underbrace{T_p^* \times \cdots \times T_p^*}_{r\text{ 個}} \otimes \underbrace{T_p \times \cdots \times T_p}_{s\text{ 個}} \to \mathbb{R}^1$

に写す T^r_s の成分である．特に，

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{i_r} \otimes \boldsymbol{e}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}^{j_s})(\boldsymbol{\omega}^1, \ldots, \boldsymbol{\omega}^r, \boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_s) \\
&= \langle \boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{e}_{i_1} \rangle \cdots \langle \boldsymbol{\omega}^r, \boldsymbol{e}_{i_r} \rangle \langle \boldsymbol{e}^{j_1}, \boldsymbol{X}_1 \rangle \cdots \langle \boldsymbol{e}^{j_s}, \boldsymbol{X}_s \rangle \\
&= \omega^1_{i_1} \cdots \omega^r_{i_r} \boldsymbol{X}^{j_1}_1 \cdots \boldsymbol{X}^{j_s}_s \\
&= \boldsymbol{e}_{i_1, \ldots, i_s}{}^{j_1, \ldots, j_s}(\boldsymbol{\omega}^1, \ldots, \boldsymbol{\omega}^r, \boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_s)
\end{aligned} \tag{1.46}
$$

であり，これはこの記法を正当化する．

もし，双対基底 $(\boldsymbol{e}_i)$ と $(\boldsymbol{e}^j)$ の替わりに異なる双対基底 $(\boldsymbol{e}_{i'})$ と $(\boldsymbol{e}^{j'})$ を選ぶなら，この新しい基底

$$
\boldsymbol{e}_{i'} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{i'_r} \otimes \boldsymbol{e}^{j'_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}^{j'_s}
$$

に関する式 (1.22) にしたがう T の要素は，

$$
T^{i'_1, \ldots, i'_r}{}_{j'_1, \ldots, j'_s} = \Phi^{i'_1}_{i_1} \cdots \Phi^{i'_r}_{i_r} \Phi^{j_1}_{j'_1} \cdots \Phi^{j_s}_{j'_s} T^{i_1, \ldots, i_r}{}_{j_1, \ldots, j_s} \tag{1.47}
$$

によって与えられる[*5]．

選ばれた反変添字 i_p と共変添字 j_p に対する要素 $T^{i_1, \ldots, i_r}{}_{j_1, \ldots, j_s}$ を持つ型 (r, s) のテンソルの縮約 (contraction) は，次の型 $(r-1, s-1)$ のテンソルとして定義される:

$$
\begin{aligned}
T^{i_1, \ldots, i_{p-1}, k, i_{p+1}, \ldots, i_r}{}_{j_1, \ldots, j_{q-1}, k, j_{q+1}, \ldots, j_s} &\boldsymbol{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{i_{p-1}} \otimes \boldsymbol{e}_{i_{p+1}} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{i_r} \\
&\otimes \boldsymbol{e}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}^{j_{q-1}} \otimes \boldsymbol{e}^{j_{q+1}} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}^{j_s}
\end{aligned} \tag{1.48}
$$

ここで添字の表記法により，全ての k(反変添字 i_p と共変添字 j_p) の値について和をとる．これでいま，縮約が基底の選び方によらないことが，式 (1.23) と式 (1.47) の助けによって確かめられた．

型 (0, 2) のテンソルは，

$$
\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}) \text{ または} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = -\boldsymbol{T}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}) \tag{1.49}
$$

が全ての $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in T_p$ について成り立つとき，対称または反対称と呼ばれる．対称または反対称は，成分の観点からは，任意の基底について，

$$
T_{ij} = T_{ji} \text{ または } T_{ij} = -T_{ji} \tag{1.50}
$$

を意味する．より一般には，型 (r, s) のテンソルは，共変添字 i と j について，

$$
\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\omega}^1, \ldots, \boldsymbol{\omega}^i, \ldots, \boldsymbol{\omega}^j, \boldsymbol{\omega}^r, \boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_s) = \pm \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\omega}^1, \ldots, \boldsymbol{\omega}^j, \ldots, \boldsymbol{\omega}^i, \boldsymbol{\omega}^r, \boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_s) \tag{1.51}
$$

が全ての $\boldsymbol{\omega}$ と $\boldsymbol{X}$ について成り立つとき，対称または反対称と呼ばれる．選ばれた反変添字についての対称または反対称についても同様に定義される．

[*5]

$$
\begin{aligned}
T^{i'_1, \ldots, i'_r}{}_{j'_1, \ldots, j'_s} =& T(e^{i'_1}, \ldots, e^{i'_r}, e_{j'_1}, \ldots, e_{j'_s}) = T(\Phi^{i'_1}{}_{k_1} e^{k_1}, \ldots, \Phi^{i'_r}{}_{k_r} e^{k_r}, \Phi_{j'_1}{}^{l_1} e_{l_1}, \ldots, \Phi_{j'_s}{}^{l_s} e_{l_s}) \\
=& \Phi^{i'_1}{}_{k_1} \cdots \Phi^{i'_r}{}_{k_r} \Phi_{j'_1}{}^{l_1} \cdots \Phi_{j'_s}{}^{l_s} T(e^{k_1}, \ldots, e^{k_r}, e_{l_1}, \ldots, e_{l_s}) = \Phi^{i'_1}{}_{k_1} \cdots \Phi^{i'_r}{}_{k_r} \Phi_{j'_1}{}^{l_1} \cdots \Phi_{j'_s}{}^{l_s} T^{i_1, \ldots, i_r}{}_{j_1, \ldots, j_s}
\end{aligned}
$$

1.3　形式の計算

型 $(0,\,s)$ のテンソルの特に重要なクラスは，全反対称テンソルである．これは全ての引数のペアについて，反対称であるような共変テンソルである．すなわち，

$$T(\boldsymbol{X}_1,\,\ldots,\,\boldsymbol{X}_i,\,\ldots,\,\boldsymbol{X}_j,\,\ldots,\,\boldsymbol{X}_s) = -T(\boldsymbol{X}_1,\,\ldots,\,\boldsymbol{X}_j,\,\ldots,\,\boldsymbol{X}_i,\,\ldots,\,\boldsymbol{X}_s) \tag{1.52}$$

が全ての添字のペア i と j および全ての $\boldsymbol{X}$ について成り立つ．この種のテンソルは型 $(0,\,s)$ の一般テンソル T に次の線形結合によって定義される効果をそれに与える交代演算子 A を作用させることによって構成される:

$$AT(\boldsymbol{X}_1,\,\ldots,\,\boldsymbol{X}_s) = \frac{1}{s!}\sum_{j_1,\,\ldots,\,j_s} \mathrm{sgn}(j_1,\ ,\ldots,\,j_s)T(\boldsymbol{X}_{j_1},\,\ldots,\,\boldsymbol{X}_{j_s}) \tag{1.53}$$

ここで和は，s 個の整数 $(1,\,\ldots,\,s)$ と $\mathrm{sgn}(j_1,\,\ldots,\,j_s) = \pm 1$ に対する全ての $s!$ 個の置換に対して拡張される．なお，$(j_1,\,\ldots,\,j_s$ は $(1,\,\ldots,\,s)$ の偶置換または奇置換であり，式 (53) は全ての $(\boldsymbol{X}_1,\,\ldots,\,\boldsymbol{X}_s)$ に対して有効である．もし T が既に全反対称ならば，T への A の効果が単純に T を再構成することは明らかである．さらにもし $s > n(n:$ ベクトル空間の次元$)$ ならば $T(\boldsymbol{X}_1,\,\ldots,\,\boldsymbol{X}_s)$ への A の効果は，それをゼロに縮ませる*6．いいかえれば，$s > n$ のとき型 $(0,\,s)$ の全反対称テンソルは存在しえない．

型 $(0,\,s)$ の全反対称テンソルは s-形式と呼ばれる．任意の 2 つの引数が等しいとき，それらが消滅しなければならないことより，s-形式は次元 $\dfrac{n!}{s!(n-s)!}$ のベクトル空間をはしる．この空間は $\Lambda^s T_p^*$ と表される．もし $T_{j_1,\,\ldots,\,j_s}$ が基底，

$$\boldsymbol{e}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}^{j_s}$$

に関した型 $(0,\,s)$ のテンソルの成分であり，かつもしテンソルが全反対称であるべきならば，その $\dfrac{n!}{s!(n-s)!}$ 個の区別される成分はその添字を狭義単調減少数列によって，

$$T_{j_1,\,\ldots,\,j_s}\, \text{ここで}\; j_1 > j_2 > \cdots > j_s \tag{1.54}$$

に並び替えたものによって区別される．$\Lambda^s T_p^*$ の基底は交代演算子 A をテンソル積の基底要素，

$$A(\boldsymbol{e}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}^{j_s})$$

に作用させることによって得られる．これは，得られた基底要素 $\boldsymbol{e}^j$ 達の外積または，wedge(くさび) 積と呼ばれ次のように書かれる:

$$\boldsymbol{e}^{j_1} \wedge \boldsymbol{e}^{j_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}^{j_s} \qquad (j_1 > j_2 > \cdots > j_s) \tag{1.55}$$

したがって一般的な s-形式は，

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_{j_1,\,\ldots,\,j_s}\boldsymbol{e}^{j_1} \wedge \boldsymbol{e}^{j_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}^{j_s} \tag{1.56}$$

と表現される．ここで和は，いま狭義単調減少数列にのみ拡張される．wedge 積の要素を交換することは，符号 (sign) の変更を伴わなければならない．したがって，

$$\boldsymbol{e}^j \wedge \boldsymbol{e}^k = -\boldsymbol{e}^k \wedge \boldsymbol{e}^j \tag{1.57}$$

---

*6 $T(e_{l_1},\,e_{l_2},\,e_{l_3})$ に対し，$\dim \boldsymbol{X} = 2$ とすると，$l_1 = l_2$ か $l_1 = l_3$ である．仮に $l_1 = l_3$ とすると，$T(e_{l_1},\,e_{l_2},\,e_{l_3}) = -T(e_{l_3},\,e_{l_2},\,e_{l_1}) = -T(e_{l_1},\,e_{l_2},\,e_{l_3})$ より $T = 0$ である．従ってこのとき全反対称テンソルは存在しない．

局所座標基底のなかで s -形式の表現は,

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_{j_1,\,\ldots,\,j_s} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_s} \tag{1.58}$$

与えられた任意の p-形式 $\boldsymbol{\Omega}^1$ と q-形式 $\boldsymbol{\Omega}^2$ に対して，それらの wedge 積は，規則

$$\boldsymbol{\Omega}^1 \wedge \boldsymbol{\Omega}^2 = A(\boldsymbol{\Omega}^1 \otimes \boldsymbol{\Omega}^2) \tag{1.59}$$

によって (p+q)-形式を得ることができる (それ故もし $p+q>n$ ならば消滅するに等しい)．形式の wedge 積は明らかに結合法則と分配法則にしたがう．しかしそれは一般に可換ではない．定義より,

$$\boldsymbol{\Omega}^1 \wedge \boldsymbol{\Omega}^2 = (\Omega^1_{j_1,\,\ldots,\,j_p} \boldsymbol{e}^{j_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}^{j_p}) \wedge (\Omega^2_{k_1,\,\ldots,\,k_q} \boldsymbol{e}^{k_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}^{k_q}) \tag{1.60}$$

ここで，$(j_1,\,\ldots,\,j_p)$ と $(k_1,\,\ldots,\,k_q)$ 狭義単調減少である．それ故,

$$\boldsymbol{\Omega}^1 \wedge \boldsymbol{\Omega}^2 = (-1)^{pq} (\boldsymbol{\Omega}^2_{k_1,\,\ldots,\,k_q} \boldsymbol{e}^{k_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}^{k_q}) \wedge (\Omega^1_{j_1,\,\ldots,\,j_p} \boldsymbol{e}^{j_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}^{j_p}) = (-1)^{pq} \boldsymbol{\Omega}^2 \wedge \boldsymbol{\Omega}^1 \tag{1.61}$$

ここで q 個の基底要素 $\boldsymbol{e}^{k_1},\,\ldots,\,\boldsymbol{e}^{k_q}$ は $\boldsymbol{\Omega}^1 \wedge \boldsymbol{\Omega}^2$ が $\boldsymbol{\Omega}^2 \wedge \boldsymbol{\Omega}^1$ の要求される形式に変換されるとき，p 個の交換を許す．

これまでは，多様体上の点で定義されたテンソルと形式を考えてきた．我々はいまから M 上の場として眺めることによって基本的な定義を拡張する．つまり M 上の型 $(r,\,s)$ の滑らかなテンソル場 $T^r_s(M)$(または単に T^r_s) は，各点 $p \in M$ に対して T^r_s の成分に関する任意の局所座標基底が座標に関する滑らかな関数になるように $T^r_s(p)$ の要素に割り当てる．この基本的定義の拡張は，微分の記法の形式化を定義するときに必要となる．

将来我々は滑らかなテンソル場のみに関心を持つだろう．そして例え”滑らか”とか”場”などの単語を省略したとしても，このことは理解しておかねばならない．

1.3.1　外微分

外微分は形式に演算子 d を適用させた結果として得られる．それは，次の規則により p-形式を $(p+1)$-形式に矛盾無く変換する:.

(a)　関数 (またはゼロ形式)f に適用された演算子 d は任意の $\boldsymbol{X} \in T^1_0$ に対して,

$$df(\boldsymbol{X}) = \langle df, \boldsymbol{X} \rangle = \boldsymbol{X} f$$

が成り立つと定義すると，1 - 形式 df を生じる．特に局所座標基底は,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^j$$

である．

(b)　もし $\boldsymbol{A}_1$ と $\boldsymbol{A}_2$ が 2 つの p-形式ならば,

$$d(\alpha \boldsymbol{A}_1 + \beta \boldsymbol{A}_2) = \alpha d\boldsymbol{A}_1 + \beta d\boldsymbol{A}_2 \qquad (\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}^1).$$

(c)　もし $\boldsymbol{A}$ が p-形式で $\boldsymbol{B}$ が q-形式ならば,

$$d(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}) = d\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B} + (-1)^p \boldsymbol{A} \wedge d\boldsymbol{B}.$$

(d)　Poincare の補題は任意の p-形式 $\boldsymbol{A}$ に対して,

$$d(d\boldsymbol{A}) = 0$$

を要求する．

前述の規則にしたがう演算子 d が well-defined(良い定義) であることを次のように考え，明らかにしよう．まず p-形式 $\boldsymbol{A}$ の外微分,

$$d\boldsymbol{A} = d(A_{j_1,\dots,j_p} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_p})$$

を考えよう．規則 (a)，(b) および (d) により，

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{A} &= dA_{j_1,\dots,j_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_p} \\ &= \frac{\partial A_{j_1,\dots,j_p}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_p} \end{aligned} \tag{1.62}$$

を得る．式 (1.62) で与えられた $d\boldsymbol{A}$ は，局所座標系の選び方に依らずに成り立つという点について確かめることが重要である．もし局所座標 (x^j) の替わりに別の組の局所座標 $(x^{j'})$ を選ぶなら，式 (1.24) と (1.47) によって，

$$A_{j'_1,\dots,j'_p} = A_{j_1,\dots,j_p} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_p}}{\partial x^{j'_p}} \tag{1.63}$$

となるから，

$$\begin{aligned} & d(A_{j'_1,\dots,j'_p} dx^{j'_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j'_p} \\ &= d\left(A_{j_1,\dots,j_p} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_p}}{\partial x^{j'_p}} dx^{j'_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j'_p}\right) \\ &= \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_p}}{\partial x^{j'_p}} dA_{j_1,\dots,j_p} \wedge dx^{j'_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j'_p} + \frac{\partial^2 x^{j_1}}{\partial x^{k'} \partial x^{j'_1}} \frac{\partial x^{j_2}}{\partial x^{j'_2}} \cdots \frac{\partial x^{j_p}}{\partial x^{j'_p}} A_{j_1,\dots,j_p} dx^{k'} \wedge \cdots \wedge dx^{j'_p} \cdots \\ & \cdots + \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_{p-1}}}{\partial x^{j'_{p-1}}} \frac{\partial x^{j_p}}{\partial x^{k'} \partial x^{j'_p}} A_{j_1,\dots,j_p} dx^{k'} \wedge dx^{j'_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j'_p} \end{aligned} \tag{1.64}$$

より，k' と j'_i の交換による (係数の) 対称性と wedge 積の同じ基底要素の反対称性の計算によって，$x^{j_i} (i = 1, \dots, p)$ に関する 2 階微分を含む式 (1.64) の右辺の全ての項は消滅する．それ故唯一生き残るのは初項のみであり[*7]，それは明らかに，

$$dA_{j_1,\dots,j_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_p} = d(A_{j_1,\dots,j_p} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_p})$$

に一致する．それ故，

$$d(A_{j'_1,\dots,j_p} dx^{j'_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j'_p}) = d(A_{j_1,\dots,j_p} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_p}) \tag{1.65}$$

であり，これは確かめたかったことである．

次に我々は $d\boldsymbol{A}$ の表現 (1.62) が規則 (c) に矛盾しないことを確かめよう．規則 (a)，(b) および (d) によって，

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}) &= d(A_{j_1,\dots,j_p} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_p} \wedge B_{jk_1,\dots,k_q} dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_q}) \\ &= \frac{\partial A_{j_1,\dots,j_p}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_p} \wedge B_{k_1,\dots,k_q} dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_q} \\ &+ A_{j_1,\dots,j_p} \frac{\partial B_{k_1,\dots,k_q}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_p} \wedge \cdots \wedge dx^{j_p} \wedge dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_q} \\ &= d\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B} + (-1)^p A_{j_1,\dots,j_p} dx^j \wedge \cdots \wedge dx^{j_p} \wedge \left(\frac{\partial B_{k_1,\dots,k_q}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_q}\right) \\ &= d\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B} + (-1)^p \boldsymbol{A} \wedge d\boldsymbol{B} \end{aligned} \tag{1.66}$$

---

*7

$$\frac{\partial^2 x^{j_1}}{\partial x^{k'} \partial x^{j'_1}} A_{j_1} dx^{k'} \wedge dx^{j'_1} = \frac{\partial^2 x^{j_1}}{\partial x^{j'_1} \partial x^{k'}} A_{j_1} dx^{j'_1} \wedge dx^{k'} = -\frac{\partial^2 x^{j_1}}{\partial x^{k'} \partial x^{j'_1}} A_{j_1} dx^{k'} \wedge dx^{j'_1} = 0$$

結局，規則 (d) の無矛盾性を確定するには，

$$\begin{aligned} d(d\boldsymbol{A}) &= d\left(\frac{\partial A_{j_1,\,\dots,\,j_p}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_p}\right) \\ &= \frac{\partial^2 A_{j_1,\,\dots,\,j_p}}{\partial x^i \partial x^k} dx^i \wedge dx^k \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_p} \equiv 0 \end{aligned} \tag{1.67}$$

を確認すればよい．これは演算 d が間違いなく,well-defined であることの論証を完成させる．

1.3.2　リー括弧およびリー微分

与えられた任意の 2 つのベクトル場 $\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ に対して，リー括弧 $[\boldsymbol{X},\,\boldsymbol{Y}]$ は，その働きが任意の関数 f に対して次が成り立つことによって定義される．

$$[\boldsymbol{X},\,\boldsymbol{Y}]f = (\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Y}\boldsymbol{X})f = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{Y}f) - \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X}f) \tag{1.68}$$

任意の 2 つの接ベクトルのリー括弧は，次によって再び接ベクトルになる;

$$[\boldsymbol{X},\,\boldsymbol{Y}](\alpha f + \beta g) = \alpha[\boldsymbol{X},\,\boldsymbol{Y}]f + \beta[\boldsymbol{X},\,\boldsymbol{Y}]g \tag{1.69}$$

および,

$$[\boldsymbol{X},\,\boldsymbol{Y}](fg) = g[\boldsymbol{X},\,\boldsymbol{Y}]f + f[\boldsymbol{X},\,\boldsymbol{Y}]g \tag{1.70}$$

ここで f と g は任意の 2 つの関数であり，α と β は任意の 2 つの実数である．これらの関係のうち，第 1 式は明らかであり，第 2 式は容易に,

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{X},\,\boldsymbol{Y}](fg) &= \boldsymbol{X}(\boldsymbol{Y}fg) - \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X}fg) \\ &= \boldsymbol{X}(g\boldsymbol{Y}f + f\boldsymbol{Y}g) - \boldsymbol{Y}(g\boldsymbol{X}f + f\boldsymbol{X}g) \\ &= g\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}f + (\boldsymbol{X}g)(\boldsymbol{Y}f) + (\boldsymbol{X}f)(\boldsymbol{Y}g) + f\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}g \\ &\quad - \{g\boldsymbol{Y}\boldsymbol{X}f + (\boldsymbol{X}f)(\boldsymbol{Y}g) + (\boldsymbol{Y}f)(\boldsymbol{X}g) + f\boldsymbol{Y}\boldsymbol{X}g\} \\ &= g[\boldsymbol{X},\,\boldsymbol{Y}]f + f[\boldsymbol{X},\,\boldsymbol{Y}]g \end{aligned} \tag{1.71}$$

と確かめられる．関数 (1.69) はリー括弧を線形演算子として確定させる．同時に関係 (1.70) はそれを微分として確定させる．

もう既に明らかになったようにリー括弧はヤコビの恒等式を満足する;

$$[[\boldsymbol{X},\,\boldsymbol{Y}],\,\boldsymbol{Z}] + [[\boldsymbol{Y},\,\boldsymbol{Z}],\,\boldsymbol{X}] + [[\boldsymbol{Z},\,\boldsymbol{X}],\,\boldsymbol{Y}] = 0 \tag{1.72}$$

既に我々は $\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ のリー括弧が接ベクトルであることをみてきた．その局所座標基底に関する成分は，その働きを x^j へ作用させることによって得られる．したがって,

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{X},\,\boldsymbol{Y}]^j &= (\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Y}\boldsymbol{X})x^j = \boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}^j - \boldsymbol{Y}\boldsymbol{X}^j \\ &= \boldsymbol{X}^k \boldsymbol{Y}^j_{\ ,\,k} - \boldsymbol{Y}^k \boldsymbol{X}^j_{\ ,\,k} \end{aligned} \tag{1.73}$$

ここで (以前示したように) コンマに続く添字によって同じ添字を持つ局所座標による偏微分を表す．

局所座標基底のもとで，リー括弧 $[\partial_k,\,\partial_j]$ は明らかに消滅する．

(通常の) 微分のように考えることで $[\boldsymbol{X},\,\boldsymbol{Y}]$ は $\boldsymbol{X}$ 方向のリー微分と呼ばれ,

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y} = [\boldsymbol{X},\,\boldsymbol{Y}] = -[\boldsymbol{Y},\,\boldsymbol{X}] = -\mathscr{L}_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{X} \tag{1.74}$$

と書かれる．より一般には，与えられた型のテンソル場 T のリー微分 $\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}}T$ は次の規則にしたがう同じ型のテンソルとして定義される;

(a)　スカラー場 f へのその作用は,

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}} f = \boldsymbol{X} f = df(\boldsymbol{X}) \tag{1.75}$$

によって与えられる.

(b)　接ベクトル $\boldsymbol{Y}$ へのその作用は既に定義したように,

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{Y} = [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}] \tag{1.76}$$

によって与えられる.

(c)　リー微分は, テンソル場に線形に作用し, テンソル積に対しては, リー bnitz 則を満足する;

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}}(S \otimes T) = \mathscr{L}_{\boldsymbol{X}} S \otimes T + S \otimes \mathscr{L}_{\boldsymbol{X}} T \tag{1.77}$$

ここで S と T は任意のテンソル場である.

前述の最後の規則は, 任意の型のテンソルに $\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}}$ を作用させることを可能にする. したがって 1-形式 $\boldsymbol{\omega}$ へのその作用は, 考えられる任意のベクトル場に対して, 関係

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{Y}) = (\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{\omega}) \otimes \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{\omega} \otimes (\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{Y}), \tag{1.78}$$

すなわち,

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}} \langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{Y} \rangle = \langle \mathscr{L}_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{Y} \rangle + \langle \boldsymbol{\omega}, \mathscr{L}_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{Y} \rangle \tag{1.79}$$

が成り立つことによって決定することができる. この最後の式を書き出すと明らかに,

$$X^k (\omega_j Y^j)_{,\,k} = (\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{\omega})_j Y^j + \omega_j (\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}} \mathbf{Y})^j \tag{1.80}$$

を得る. または式 (1.73) を用いて,

$$\begin{aligned}(\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{\omega})_j Y^j &= X^k (\omega_{j,\,k} Y^j + \omega_j Y^j_{\,,\,k}) - \omega_j (X^k Y^j_{\,,\,k} - Y^k X^j_{\,,\,k}) \\ &= (X^k \omega_{j,\,k} + \omega_k X^k_{\,,\,j}) Y^j \end{aligned} \tag{1.81}$$

が得られる. この最後の式が任意の $\boldsymbol{Y}$ について成り立つことより,

$$(\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{\omega})_j = \omega_{j,\,k} X^k + \omega_k X^k_{\,,j} \tag{1.82}$$

を結論付けることが分かる.

式 (1.79) は,

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}} [\omega(\boldsymbol{Y})] = (\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\omega}(\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{Y}) \tag{1.83}$$

と書いてもよい. 規則 (c) により, 式 (1.83) は型 (r, s) のテンソルに対する一般化を許す. よって,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}} [T(\boldsymbol{\omega}^1, \ldots, \boldsymbol{\omega}^r, \boldsymbol{Y}_1, \ldots, \boldsymbol{Y}_s)] =& (\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}} T)(\boldsymbol{\omega}^1, \ldots, \boldsymbol{\omega}^r, \boldsymbol{Y}_1, \ldots, \boldsymbol{Y}_s) \\ &+ T(\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{\omega}^1, \boldsymbol{\omega}^2, \ldots, \boldsymbol{\omega}^r, \boldsymbol{Y}_1, \ldots, \boldsymbol{Y}_s) + \cdots \\ &+ T(\boldsymbol{\omega}^1, \ldots, \boldsymbol{\omega}^r, \boldsymbol{Y}_1, \ldots, \mathscr{L}_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{Y}_s) \end{aligned} \tag{1.84}$$

が成り立つ. ここでこの式の右辺の最初の項以外の全ての項は, 既に知られた結果 (1.73), (1.75), と (1.82) により評価することができる. したがって $\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}} T$ の成分は, 式 (1.84) から導くことができる.

のちのために，ここではＬｉｅ微分に対する 1-形式の外微分に関する簡単な恒等式を導いておこう．式 (1.82) を使うことにより，

$$\begin{aligned}\langle \mathscr{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\omega},\, \boldsymbol{Y}\rangle - \boldsymbol{Y}\langle \boldsymbol{\omega},\, \boldsymbol{X}\rangle &= (\omega_{j,\,k})X^k + \omega_k X^k_{\ ,j})Y^j - Y^j(\omega_{k,\,j}X^k + \omega_k X^k_{\ ,j}) \\ &= (\omega_{j,\,k} - \omega_{k,\,j})X^k Y^j = 2d\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{X},\, \boldsymbol{Y}) \end{aligned} \tag{1.85}$$

いま，式 (1.79) を $\langle \mathscr{L}_{\boldsymbol{X},\,\boldsymbol{Y}}\rangle$ に代入することにより，次の結果を得る;

$$d\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{X},\, \boldsymbol{Y}) = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{X}\langle \boldsymbol{\omega},\, \boldsymbol{Y}\rangle - \boldsymbol{Y}\langle \boldsymbol{\omega},\, \boldsymbol{X}\rangle - \langle \boldsymbol{\omega},\, [\boldsymbol{X},\, \boldsymbol{Y}]\rangle\} \tag{1.86}$$

ここで $\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}$ のところにＬｉｅ括弧 $[\boldsymbol{X},\, \boldsymbol{Y}]$ を書いた．

1.4　共変微分

我々はいまから外微分やリー微分とは異なる微分である多様体に付加的構造を与える微分の一種を定義する．この付加的構造はアフィン (affine) 接続とよび，それは M 上の任意のベクトル場 $\boldsymbol{X}$ の演算子 $\nabla_{\boldsymbol{X}}$ が，任意のベクトル場 $\boldsymbol{Y}$ をベクトル場 $\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}$ の中に写像する．これらの要求に対して無矛盾であるために，次の条件を課す;

(a)　$\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}$ は引数 $\boldsymbol{X}$ に対して線型である，つまり

$$\nabla_{f\boldsymbol{X}+g\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Z} = f\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Z} + g\nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Z} \qquad (\boldsymbol{X},\, \boldsymbol{Y},\, \boldsymbol{Z} \in T^1_{\ 0}), \tag{1.87}$$

(b)　$\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}$ は引数 $\boldsymbol{Y}$ に対して線型である．つまり，

$$\nabla_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Z}) = \nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y} + \nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Z} \qquad (\boldsymbol{X},\, \boldsymbol{Y},\, \boldsymbol{Z} \in T^1_{\ 0}) \tag{1.88}$$

(c)

$$\nabla_{\boldsymbol{X}} f = \boldsymbol{X} f \tag{1.89}$$

ここで ｆ は M 上の任意の関数である．最後に，

(d)

$$\nabla_{\boldsymbol{X}}(f\boldsymbol{Y}) = (\nabla_{\boldsymbol{X}} f)\boldsymbol{Y} + f\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}. \tag{1.90}$$

式 (1.89) により，局所座標基底 (∂_k) に対する，∇_{∂_k} が関数に作用するとき，x^k に関する偏微分に一致することに注意しよう．

規則 (a)-(d) によって特定されるベクトル場 $\boldsymbol{Y}(\in T^1_{\ 0})$ に対する $\nabla_{\boldsymbol{X}}$ の作用によって，反変ベクトル場 $\boldsymbol{X}$ を $\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}$ に写像する型 (1, 1) のテンソル場として $\boldsymbol{Y}$ の共変微分 $\nabla\boldsymbol{Y}$ を定義しよう．つまり，

$$\nabla\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X}) = \langle \nabla\boldsymbol{Y},\, \boldsymbol{X}\rangle = \nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y} \tag{1.91}$$

が全ての $\boldsymbol{X} \in T^1_{\ 0}$ に対して成り立つ．この記法において，我々は式 (1.90) を，

$$\nabla(f\boldsymbol{Y}) = df \otimes \boldsymbol{Y} + f\nabla\boldsymbol{Y} \tag{1.92}$$

の形に書き換えることができる．

より正確な接続の意味を明らかにするために，任意の選ばれた双対基底 $(\boldsymbol{e}_i)$ と $(\boldsymbol{e}^j)$ に関して $\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}$ を書き換えるのは便利である．したがって規則 (a)-(d) を用いることによって，

$$\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y} = \nabla_{\boldsymbol{X}}(Y^j\boldsymbol{e}_j) = (\boldsymbol{X}Y^j)\boldsymbol{e}_j + Y^j\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{e}_j \tag{1.93}$$

を得る．特定の $\boldsymbol{e}_j$ に関する $\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{e}_j$ が型 (1, 0) のテンソル場であることより，選ばれた基底に関する次の形の表現

$$\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{e}_j = \omega^l{}_j(\boldsymbol{X})\boldsymbol{e}_l, \tag{1.94}$$

が成り立たねばならない．ここで (l と j に依存する)$\omega^l{}_j$ は 1-形式である．したがって，

$$\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{X}Y^j)\boldsymbol{e}_j + Y^j\omega^l{}_j(\boldsymbol{X})\boldsymbol{e}_l, \tag{1.95}$$

のように書いてもよい．これの代わりに，式 (1.93) は，

$$\begin{aligned}\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y} &= (\boldsymbol{X}Y^j)\boldsymbol{e}_j + Y^j\nabla_{X^k\boldsymbol{e}_k}\boldsymbol{e}_j \\ &= (\boldsymbol{X}Y^j)\boldsymbol{e}_j + Y^jX^k\nabla_{\boldsymbol{e}_k}\boldsymbol{e}_j,\end{aligned} \tag{1.96}$$

の形にも書き換えられる．または定義 (94) にしたがって，

$$\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{X}Y^j)\boldsymbol{e}_j + Y^jX^k\omega^l{}_j(\boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_l, \tag{1.97}$$

と表せる．いま，

$$\omega^l{}_j(\boldsymbol{e}_k) = \omega^l{}_{jk} \tag{1.98}$$

と置くと，これは $\omega^l{}_j$ を基底 $(\boldsymbol{e}^k)$ で展開した $\boldsymbol{e}^k$ の係数になり，接続 ∇ は n^2 個の 1-形式を指定するか，あるいは n^3 個のスカラー場 $\omega^l{}_{ljk}$ に等しいと結論付けることになる．

式 (1.95) に戻りそれを

$$\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y} = [\boldsymbol{X}Y^j + \omega^j_l(\boldsymbol{X})Y^l]\boldsymbol{e}_j \tag{1.99}$$

という形に書き換えると，

$$(\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y})^j = \boldsymbol{X}Y^j + \omega^j_l(\boldsymbol{X})Y^l \tag{1.100}$$

を推論する．局所座標基底 $(\partial_k,\, dx^l)$ によって式 (1.100) は，

$$(\nabla_{\partial_k}\boldsymbol{Y})^j = \partial_kY^j + Y^l\omega^j_{lk} = Y^j{}_{,\,k} + Y^l\omega^j_{lk} \tag{1.101}$$

を与える．局所座標基底の場合，慣習的に，

$$\omega^j_{lk}\text{は}\Gamma^j_{lk}\text{と書く} \tag{1.102}$$

ものとし，(普通の偏微分を示すコンマと対比して) セミコロンによって共変微分を示す．これより標準的な公式

$$Y^j_{;\,k} = Y^j_{,\,k} + Y^l\Gamma^j_{lk} \tag{1.103}$$

を得る．

ベクトル場の共変微分の定義は，∇ の演算子がテンソル積に作用するとき，ライプニッツ則を満たすという要求によって一般にテンソル場に拡張される．したがって

$$\nabla(S\otimes T) = \nabla S\otimes T + S\otimes\nabla T \tag{1.104}$$

を要求する．ここで S と T は任意の 2 つのテンソル場である．この要求の直接の結果として，

$$\begin{aligned}\nabla_{\boldsymbol{X}}\{T(\boldsymbol{\omega}^1,\,\ldots,\,\boldsymbol{\omega}^r,\,\boldsymbol{Y}_1,\,\ldots,\,\boldsymbol{Y}_s)\} =&(\nabla_{\boldsymbol{X}}T)(\boldsymbol{\omega}^1,\,\ldots,\,\boldsymbol{\omega}^r,\,\boldsymbol{Y}_1,\,\ldots,\,\boldsymbol{Y}_s) \\ &+ T(\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\omega}^1,\,\boldsymbol{\omega}^2,\,\ldots,\,\boldsymbol{\omega}^r,\,\boldsymbol{Y}_1,\,\ldots,\,\boldsymbol{Y}_s) + \cdots \\ &+ T(\boldsymbol{\omega}^1,\,\ldots,\,\boldsymbol{\omega}^r,\,\boldsymbol{Y}_1,\,\ldots,\,\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}_s)\end{aligned} \tag{1.105}$$

が成り立つ (式 (1.84) をみよ)．したがってもし $\boldsymbol{\Omega}$ が 1-形式ならば，全てのベクトル場 $\boldsymbol{Y}$ に対して，前述の式は,

$$\nabla_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{Y})) = (\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\Omega})(\boldsymbol{Y}) + \boldsymbol{\Omega}(\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}) \tag{1.106}$$

を与える．または局所基底 $(\boldsymbol{e}_i)$ および $(\boldsymbol{e}^j)$ においては,

$$\nabla_{\boldsymbol{X}}(\Omega_j Y^j) = (\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\Omega})_j Y^j + \Omega_j(\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y})^j \tag{1.107}$$

が成り立つ．これより，規則 (c) と式 (1.100) を用いることによって

$$\begin{aligned}(\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\Omega})_j Y^j &= (\boldsymbol{X}\Omega_j)Y^j + \Omega_j(\boldsymbol{X}Y^j) - \Omega_j[\boldsymbol{X}Y^j + Y^l\omega^j_{\ l}(\boldsymbol{X})] \\ &= (\boldsymbol{X}\Omega_j)Y^j - \Omega_l\omega^l_{\ j}(\boldsymbol{X})Y^j\end{aligned} \tag{1.108}$$

が成り立つ．これより,

$$(\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\Omega})_j = \boldsymbol{X}\Omega_j - \Omega_l\omega^l_{\ j}(\boldsymbol{X}), \tag{1.109}$$

または,

$$\nabla_{\boldsymbol{X}}\Omega = [\boldsymbol{X}\Omega_j - \Omega_l\omega^l_{\ j}(\boldsymbol{X})]\boldsymbol{e}^j \tag{1.110}$$

を結論付ける．$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{e}^j$ の場合にこの最後の式を適用すると,

$$\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{e}^j = -\omega^j_{\ l}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{e}^l \tag{1.111}$$

を得，これは式 (1.94) と対比されよう．テンソル積においてライプニッツ則を許可することと同時に式 (1.111) は n^2 個の 1-形式 $\omega^l_{\ j}$ の知識が共変微分の 1-形式を決定付けるのに充分となることを示す.

さらに我々は，局所座標基底において，式 (1.109) は,

$$\Omega_{j;k} = \Omega_{j,k} - \Omega_l\Gamma^l_{\ jk} \tag{1.112}$$

を与えることに注意しよう.

式 (1.109) と (1.112) を 1-形式 df に適用すると重要な結果が得られる．局所座標基底における df の成分が $f_{,j}$ であることより，式 (1.112) から,

$$f_{,k;j} = f_{,k,j} - f_{,l}\Gamma^l_{\ jk}; \tag{1.113}$$

を得る．そしてこの式の添字 j と k を入れ替えることにより,

$$f_{,k;j} = f_{,k,j} - f_{,l}\Gamma^l_{\ kj} \tag{1.114}$$

を得る．関数に適用した偏微分が入れ替わったことにより，式 (1.113) と (1.114) の差をとることによって

$$f_{,f;k} - f_{,k;j} = -f_{,l}(\Gamma^l_{\ jk} - \Gamma^l_{\ kj}) \tag{1.115}$$

を得る．式 (1.115) の右辺は，非対称の接続の場合に限り消滅しない．この計算により，慣習的に

$$T^l_{jk} = -(\Gamma^l_{\ jk} - \Gamma^l_{\ kj}) \tag{1.116}$$

と書く．式 (1.115) にこの量が出現することにより，T^l_{jk} は型 (1, 2) のテンソルの成分であることは明らかである．これは (捩率:ねじれ率)(torsion) テンソルと呼ばれる．捩率テンソルは §5 でより一般的に定義される; そしてこれについて式 (1.115) を下記のように記すことができる;

$$f_{,j;k} - f_{,k;j} = T^l_{jk}f_{,l} \tag{1.117}$$

式 (1.105) に戻ると，いま既に式 (1.99) と (1.109) の助けによって任意のテンソル場の共変微分を書き下すことができるようになったことが分かるだろう．したがって,

$$S^{ij}_{\ \ \ k;l} = S^{ij}_{\ \ \ k,l} + S^{mj}_{\ \ \ k}\Gamma^i_{\ ml} + S^{im}_{\ \ \ k}\Gamma^j_{\ \ ml} + S^{ij}_{\ \ \ m}\Gamma^m_{kl} \tag{1.118}$$

である.

1.4.1　平行移動と測地線

$\boldsymbol{Y}$ を反変ベクトル場とする．M 上の曲線 λ に伴うその変化を考えよう．(λ のパラメータ)t の増分 δt によって λ に伴う点の移動によって引き起こされる $\boldsymbol{Y}$ の変化量 $\delta\boldsymbol{Y}$ は，局所座標系では，

$$(\delta\boldsymbol{Y})^j = Y^j_{\ ,k}\frac{dx^k(\lambda(t))}{dt}\delta t \tag{1.119}$$

によって与えられる．ユークリッド幾何の座標の順序対系の場合，もし $\delta\boldsymbol{Y}=0$ ならば，$\boldsymbol{Y}$ は λ に伴って平行的に伝わるという．接続を持つ一般の可微分多様体の場合，もし，

$$(\boldsymbol{DY})^j = (\nabla_{\partial k}\boldsymbol{Y})^j\frac{dx^k(\lambda(t))}{dt}\delta t = Y^j_{\ ;k}\frac{dx^k(\lambda(t))}{dt}\delta t = 0, \tag{1.120}$$

または，

$$(Y^j_{\ k} + Y^l\Gamma^j_{\ lk})\frac{dx^k(\lambda(t))}{dt}\delta t = 0 \tag{1.121}$$

であるとき，類推的にベクトル $\boldsymbol{Y}$ は λ に伴って平行的に伝わる，と定義する．言い換えると，λ に伴う $\boldsymbol{Y}$ の平行的伝わりには，

$$(\delta\boldsymbol{Y})^j = -Y^l\Gamma^j_{\ lk}\frac{dx^k(\lambda(t))}{dt}\delta t \tag{1.122}$$

を要求する (式 (1.119) をみよ)．特に曲線 λ の接ベクトル $\dfrac{dx^j(\lambda(t))}{dt}$ は λ に伴って平行に伝わり，

$$\delta\left(\frac{dx^j(\lambda(t))}{dt}\right) = -\Gamma^j_{\ lk}\frac{dx^l(\lambda(t))}{dt}\frac{dx^k(\lambda(t))}{dt}\delta t \tag{1.123}$$

となる．

M 上の曲線 λ は，λ の接ベクトルがそれ自体の積を残して平行に伝わるとき，測地線と呼ばれる．この条件は λ を測地線とするとき明らかに

$$\frac{dx^j(\lambda(t))}{dt} - \Gamma^j_{\ lk}\frac{dx^l(\lambda(t))}{dt}\frac{dx^k(\lambda(t))}{dt}\delta t = [1-\phi(t)\delta t]\left(\frac{dx^j(\lambda(t))}{dt} + \frac{d^2x^j(\lambda(t))}{dt^2}\delta t\right) \tag{1.124}$$

と表される．ここで $\phi(t)$ は t の (なんらかの) 関数である．極限 $\delta t \to 0$ において測地線の式は，

$$\frac{d^2x^j}{dt^2} + \Gamma^j_{\ lk}\frac{dx^l}{dt}\frac{dx^k}{dt} = \phi(t)\frac{dx^j}{dt} \tag{1.125}$$

となる．これにより，次が既に確かめられる．もし変数 s が，

$$s = \int^t dt''\exp\left\{\int^{t''}dt'\phi(t')\right\} \tag{1.126}$$

によって曲線 λ のパラメータを置き換えるなら，式 (1.125) は，

$$\frac{d^2x^j}{ds^2} + \Gamma^j_{\ lk}\frac{dx^l}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0 \tag{1.127}$$

になり，そして測地線の式がこの形に単純化できるとき，これをアフィンパラメータ化と呼ぶ．ここで s の選び方の任意性はそれ自身かそれの定数倍しかないことに注意しよう．

1.5　曲率形式およびカルタン構造式

接続によって多様体に自然に与えられるものとして，2 つの写像

$$T(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y} - \nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{X} - [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}] \tag{1.128}$$

および

$$R(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \nabla_{\boldsymbol{X}}\nabla_{\boldsymbol{Y}} - \nabla_{\boldsymbol{Y}}\nabla_{\boldsymbol{X}} - \nabla_{[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}]} \tag{1.129}$$

がある．ここで $\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ は 2 つの反変ベクトル場である．これらの写像は捩率 (ねじれ率) および曲率と呼ばれる．定義によりこれらは各々の変数に対して反対称である．

まず捩率について考えよう．T が変数 $\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ について線型であることは既に確かめられる．したがって，

$$T(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}) = T(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z}) + T(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}) \qquad (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in {T^1}_0) \tag{1.130}$$

および

$$T(f\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = fT(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \tag{1.131}$$

である．ここで f は任意の関数である．(これらの関係式の 2 つめを証明するには同値関係

$$[f\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}] = f[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}] - (\boldsymbol{Y}f)\boldsymbol{X} \tag{1.132}$$

を使う必要がある．) 関係式 (1.130) と (1.131) は明らかに写像;

$$T : {T^1}_0 \times {T^1}_0 \to {T^1}_0 \tag{1.133}$$

が多重線型であることを示唆する．