# 接続係数の変換則

$$\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} - \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\gamma'}} \tag{1}$$

# 一般のテンソルの共変微分の方法

一般のテンソルの共変微分を定義する準備が整った．我々はいま，

1. スカラー $S$ に対しては，$\nabla_\beta S = \dfrac{\partial S}{\partial x^\beta} = S_{,\beta}$
2. ベクトル基底 $\boldsymbol{e}_\mu$ に対しては，$\nabla_\beta \boldsymbol{e}_\mu = \mathit{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\beta}\boldsymbol{e}_\alpha$
3. 双対ベクトル基底 $\boldsymbol{w}^\mu$ に対しては，$\nabla_\beta \boldsymbol{w}^\mu = -\mathit{\Gamma}^{\mu}{}_{\nu\beta}\boldsymbol{w}^\nu$

の 3 つの共変微分を得たわけだが，テンソルの定義を見れば分かるようにテンソルは上記 3 つの成分の積だけで構成されている．従って，一般のテンソルに対する共変微分は単にライプニッツ則を適用して各成分ごとに共変微分を行えばよいことになる．以上のことをそのまま行うと次の式が導かれる．

# 代表的なテンソルの共変微分

$$\nabla_\mu T_\alpha = \partial_\mu T_\alpha - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu}T_\lambda \tag{2}$$

$$\nabla_\mu T^\alpha = \partial_\mu T^\alpha + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}T^\lambda \tag{3}$$

$$\nabla_\mu T_{\alpha\beta} = \partial_\mu T_{\alpha\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu}T_{\lambda\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\mu}T_{\alpha\lambda} \tag{4}$$

$$\nabla_\mu T^{\alpha\beta} = \partial_\mu T^{\alpha\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}T^{\lambda\beta} + \Gamma^{\beta}_{\lambda\mu}T^{\alpha\lambda} \tag{5}$$

$$\nabla_\mu T^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \partial_\mu T^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}T^{\lambda}_{\beta\gamma\delta} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\mu}T^{\alpha}_{\lambda\gamma\delta} - \Gamma^{\lambda}_{\gamma\mu}T^{\alpha}_{\beta\lambda\delta} - \Gamma^{\lambda}_{\delta\mu}T^{\alpha}_{\beta\gamma\lambda} \tag{6}$$

$$\nabla_\mu T_{\alpha\beta\gamma\delta} = \partial_\mu T_{\alpha\beta\gamma\delta} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu}T_{\lambda\beta\gamma\delta} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\mu}T_{\alpha\lambda\gamma\delta} - \Gamma^{\lambda}_{\gamma\mu}T_{\alpha\beta\lambda\delta} - \Gamma^{\lambda}_{\delta\mu}T_{\alpha\beta\gamma\lambda} \tag{7}$$