リー微分

ここでは一様な空間の性質を調べるために，リー微分と呼ばれる概念を導入する．なお，ここでの説明の都合上 $\boldsymbol{x}$ のように書いたら，それは x^μ を各成分とするベクトルを表すものとする．

無限小の座標変換

2 つの座標系が無限小 ε によって，

$$\overline{x}^\mu = x^\mu - \varepsilon\xi^\mu(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

という形で結ばれているとしよう． この意味は $\boldsymbol{x}$ 系で点 P の座標が a^μ とすると，$\overline{\boldsymbol{x}}$ 系ではこの同一の点が $\overline{x}^\mu = a^\mu - \varepsilon\xi^\mu(\boldsymbol{a})$ となっていることを示す．ここである点 Q を $\overline{\boldsymbol{x}}$ 系での座標値が a^μ となるように選んだものとしよう．今，この 2 つの点での物理量の差を考えたいが，異なる 2 点間ではいくらその間の距離が無限小であっても，基底の変化などがありそのままでは比較できない．そこで点 Q での $\overline{\boldsymbol{x}}$ 系での座標値が a^μ で，点 P での x^μ 系での座標値と等しいことから, $\overline{\boldsymbol{x}}$ 系での点 Q が $\boldsymbol{x}$ 系での点 P に対応するものと考えることにし，この点 P と点 Q の 2 点間での物理量をテンソルで表し，点 Q での $\overline{\boldsymbol{x}}$ 系で見たテンソル場を点 P での $\boldsymbol{x}$ 系でのテンソル場とみなしたものから，点 P での $\boldsymbol{x}$ 系で見たテンソル場を引いたもので微分を定義することにしよう．このような微分をリー微分という．つまり，一般のテンソルを添字を省略して $T = T(\boldsymbol{x})$ とし，点 Q でのテンソル場を点 P でのテンソル場として解釈したものを $T_{Q\to P}$ とすると，リー微分の定義は一般に，

$$\mathcal{L}_\xi T = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{T_{Q\to P} - T(\boldsymbol{x}_P)}{\varepsilon} \tag{2}$$

と表されることになる． まず手始めに一番簡単な場合であるテンソル場がスカラー場 ϕ である場合を考えよう．スカラーは 0 階のテンソルとして定義され，定義より同一の点のスカラーは座標変換で不変であるから，

$$\left(\overline{\phi}(\boldsymbol{a}) = \qquad\right) \qquad \overline{\phi}(\overline{\boldsymbol{x}}_Q) = \phi(\boldsymbol{x}_Q) = \phi(\boldsymbol{a} + \varepsilon\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}_Q)) \tag{3}$$

が成り立っている． ただし，最後の変形は座標変換 (1) を使用した． ここで，点 Q は $\overline{\boldsymbol{x}}$ 系での座標の値が a^μ となる点であったから，$\overline{\boldsymbol{x}}$ 系でのスカラー場の値 $\overline{\phi}(\overline{\boldsymbol{x}})$ は元の点 P での $\boldsymbol{x}$ 系でのスカラー場の値に対応するものとみなせる．（もちろん一般に $\overline{\phi}(\overline{\boldsymbol{x}}) \neq \phi(\boldsymbol{x})$ である）そこで点 Q での $\overline{\boldsymbol{x}}$ 系で見たスカラー場 $\overline{\phi}(\overline{\boldsymbol{x}})$ を，点 P での $\boldsymbol{x}$ 系でのスカラー場として解釈したものを $\phi_{Q\to P}$ としよう． すると，$\phi_{Q\to P} = \overline{\phi}(\overline{\boldsymbol{x}}_Q)$ だから，(3) より，$\phi_{Q\to P} = \phi(\boldsymbol{a} + \varepsilon\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}_Q))$ となるので，これを (2) 式に代入すると，

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}}\phi = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\phi_{Q\to P} - \phi(\boldsymbol{x}_P)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\phi(\boldsymbol{a} + \varepsilon\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}_Q)) - \phi(\boldsymbol{a})}{\varepsilon} \tag{4}$$

となるが，ここで全微分より，

$$\phi(\boldsymbol{a} + \delta\boldsymbol{x}) - \phi(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}}\delta x^\mu = \phi_{,\,\mu}|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}}\delta x^\mu \tag{5}$$

だから，$\delta\boldsymbol{x} = \varepsilon\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}_Q)$ と置くと，これは (4) 式の分子そのものである．これは ε の 0 次の項で近似できるから，

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}}\phi = \phi_{,\,\mu}|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}}\xi^\mu(\boldsymbol{x}_Q) = \phi_{,\,\mu}|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}}\xi^\mu(\boldsymbol{a} + \varepsilon\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}_Q)) = \phi_{,\,\mu}|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}}\xi^\mu(\boldsymbol{a}) = \phi_{,\,\mu}\xi^\mu \tag{6}$$

となる．これがスカラー場のリー微分である．

次にベクトル V^μ のリー微分を考えよう．点 P と点 Q を先ほどと同じものとし，リー微分の定義 (2) を具体的に計算すればよい．そのためにまず $V^\mu_{Q\to P}$ を求めてみよう．$V^\mu_{Q\to P}$ は，スカラー場の議論と同じく，点 Q での $\overline{\boldsymbol{x}}$ 系から見たベクトル場 $\overline{V}^\mu(\overline{\boldsymbol{x}}_Q)$ を点 P での $\boldsymbol{x}$ 系からみたベクトル場として解釈したものであった．つまり，$V^\mu_{Q\to P} = \overline{V}^\mu(\overline{\boldsymbol{x}}_Q)$ である．$\overline{V}^\mu(\overline{x}_Q)$ は反変ベクトルだから，

$$V^\mu_{Q\to P} = \overline{V}^\mu(\overline{\boldsymbol{x}}_Q) = \frac{\partial \overline{x}^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu(\boldsymbol{x}_Q) = \frac{\partial \overline{x}^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu(\boldsymbol{a} + \varepsilon \boldsymbol{\xi}) \tag{7}$$

が成り立つことになる．なお，式末尾の $\boldsymbol{\xi}$ は本来は点 $\boldsymbol{x}_Q$ でのものであるが，スカラー場の議論と同様，ε の 0 次の近似が使えるので点 P での値としてよく，以後 $\boldsymbol{\xi}$ と略すことにする．(ただし $V^\nu(\boldsymbol{a}+\varepsilon\boldsymbol{\xi})$ を $V^\nu(\boldsymbol{a})$ で近似してはならない．何故なら後で微分を定義するときに 0 次の項がすべて消えてしまうからである)

ここで，(1) 式の両辺を x^ν で微分すると，

$$\frac{\partial \overline{x}^\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} - \varepsilon \xi^\mu_{,\,\nu} = \delta^\mu_\nu - \varepsilon \xi^\mu_{,\,\nu} \tag{8}$$

が得られる．また，全微分より，

$$V^\nu(\boldsymbol{a} + \delta \boldsymbol{x}) - V^\nu(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\lambda}\delta x^\lambda = V^\nu_{,\lambda}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}} \delta x^\lambda$$

だから，ここでも表記の煩雑さを避けるため $V^\nu_{,\lambda}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}}$ を $V^\nu_{,\lambda}$ と表記することにすると，

$$V^\nu(\boldsymbol{a} + \delta \boldsymbol{x}) = V^\nu(\boldsymbol{a}) + V^\nu_{,\lambda} \delta x^\lambda$$

において $\delta x^\lambda \equiv \varepsilon \xi^\lambda$ を代入すると，

$$V^\nu(\boldsymbol{a} + \varepsilon \xi^\lambda) = V^\nu(\boldsymbol{a}) + \varepsilon V^\nu_{,\lambda} \xi^\lambda \tag{9}$$

結局，(7)，(8)，(9)，により，

$$\begin{aligned} V^\mu_{Q\to P} &= \frac{\partial \overline{x}^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu(\boldsymbol{a} + \varepsilon \boldsymbol{\xi}) \\ &= \left(\delta^\mu_\nu - \varepsilon \xi^\mu_{,\,\nu}\right)\left(V^\nu(\boldsymbol{a}) + \varepsilon V^\nu_{,\lambda}\xi^\lambda\right) \\ &= \delta^\mu_\nu V^\nu(\boldsymbol{a}) + \delta^\mu_\nu \varepsilon V^\nu_{,\lambda}\xi^\lambda - \varepsilon \xi^\mu_{,\,\nu} V^\nu(\boldsymbol{a}) - \varepsilon^2 \xi^\mu_{,\,\nu} V^\nu_{,\lambda}\xi^\lambda \\ &= V^\mu(\boldsymbol{a}) + \varepsilon V^\mu_{,\lambda}\xi^\lambda - \varepsilon \xi^\mu_{,\,\nu} V^\nu(\boldsymbol{a}) - \varepsilon^2 \xi^\mu_{,\,\nu} V^\nu_{,\lambda}\xi^\lambda \end{aligned}$$

が得られるが，最後の ε^2 の項は ε の 2 次の無限小なので無視してよい．結局

$$V^\mu_{Q\to P} = V^\mu(\boldsymbol{a}) + \varepsilon V^\mu_{,\lambda}\xi^\lambda - \varepsilon \xi^\mu_{,\,\nu} V^\nu(\boldsymbol{a}) \tag{10}$$

が成り立つことが分かった．これで $V^\mu_{Q\to P}$ の形が具体的に分かったのでリー微分の定義式 (2) に代入して計算すると，

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi V^\mu &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{V^\mu_{Q\to P} - V^\mu(\boldsymbol{x}_P)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\cancel{V^\mu(\boldsymbol{a})} + \varepsilon V^\mu_{,\lambda}\xi^\lambda - \varepsilon \xi^\mu_{,\,\nu} V^\nu(\boldsymbol{a}) - \cancel{V^\mu(\boldsymbol{a})}}{\varepsilon} \\ &= V^\mu_{,\lambda}\xi^\lambda - \xi^\mu_{,\,\nu} V^\nu(\boldsymbol{a}) \end{aligned}$$

が得られた．ここでこの結果は結局 $\boldsymbol{x}$ 系の点 $\boldsymbol{a}$ での結果であるが，$V^\nu(\boldsymbol{a})$ だけ特別に $\boldsymbol{a}$ を付けて書くのは不自然であろうから，全て $\boldsymbol{a}$ を付けるか，或いは単に，

$$\mathcal{L}_\xi V^\mu = V^\mu_{,\,\nu}\xi^\nu - \xi^\mu_{,\,\nu} V^\nu \tag{11}$$

と表記したほうがよいであろう．これが 1 階の反変ベクトルのリー微分である．なお添字の和をとっているところは同じ添字に統一した．

最後に計量のリー微分を求めるために，2 階の共変テンソルのリー微分を求めてみよう．先ほどまでの議論と同様，$A_{\mu\nu\ P\to Q} = \overline{A}_{\mu\nu}(\overline{x}_Q)$ でありテンソルの変換則より，

$$A_{\mu\nu\ P\to Q} = \overline{A}_{\mu\nu}(\overline{\boldsymbol{x}}_Q) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \overline{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \overline{x}^\nu}A_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}_Q) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \overline{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \overline{x}^\nu}A_{\alpha\beta}(\boldsymbol{a}+\varepsilon\boldsymbol{\xi}) \tag{12}$$

が成り立つ. 一方 (1) 式の添字の μ を α に変えて両辺を $\overline{x}^\mu$ で微分すると，

$$\frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial \overline{x}^\mu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \overline{x}^\mu} - \varepsilon\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^\lambda}{\partial \overline{x}^\mu}$$

よって，

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial \overline{x}^\mu} = \delta^\alpha_\mu + \varepsilon\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^\lambda}{\partial \overline{x}^\mu} \tag{13}$$

であるが，添字を変えた

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial \overline{x}^\mu} = \delta^\lambda_\mu + \varepsilon\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \overline{x}^\mu} \tag{14}$$

も成り立っているので，これを (13) 式に代入すると，無限小 ε の 2 次以上の項を無視することにより，

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial \overline{x}^\mu} = \delta^\alpha_\mu + \varepsilon\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\lambda}\left(\delta^\lambda_\mu + \varepsilon\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \overline{x}^\mu}\right) = \delta^\alpha_\mu + \delta^\lambda_\mu\varepsilon\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\lambda} = \delta^\alpha_\mu + \varepsilon\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} = \delta^\alpha_\mu + \varepsilon\xi^\alpha_{,\ \mu} \tag{15}$$

また，反変ベクトルの議論とまったく同様にして，$A_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x})$ の全微分を考えることにより，

$$A_{\alpha\beta}(\boldsymbol{a}+\varepsilon\boldsymbol{\xi}) = A_{\alpha\beta}(\boldsymbol{a}) + \varepsilon A_{\alpha\beta,\ \lambda}\xi^\lambda \tag{16}$$

が成り立つから，(12)，(15)，(16) より，ε の 2 次以上の項を切り捨てて，

$$\begin{aligned}
A_{\mu\nu\ P\to Q} &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial \overline{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \overline{x}^\nu}A_{\alpha\beta}(\boldsymbol{a}+\varepsilon\boldsymbol{\xi}) \\
&= (\delta^\alpha_\mu + \varepsilon\xi^\alpha_{,\ \mu})(\delta^\beta_\nu + \varepsilon\xi^\beta_{,\ \nu})(A_{\alpha\beta}(\boldsymbol{a}) + \varepsilon A_{\alpha\beta,\ \lambda}\xi^\lambda) \\
&= (\delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\nu + \delta^\alpha_\mu\varepsilon\xi^\beta_{,\ \nu} + \delta^\beta_\nu\varepsilon\xi^\alpha_{,\ \mu})(A_{\alpha\beta}(\boldsymbol{a}) + \varepsilon A_{\alpha\beta,\ \lambda}\xi^\lambda) \\
&= \delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\nu A_{\alpha\beta}(\boldsymbol{a}) + \delta^\alpha_\mu\varepsilon\xi^\beta_{,\ \nu}A_{\alpha\beta}(\boldsymbol{a}) + \delta^\beta_\nu\varepsilon\xi^\alpha_{,\ \mu}A_{\alpha\beta}(\boldsymbol{a}) + \delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\nu\varepsilon A_{\alpha\beta,\ \lambda}\xi^\lambda \\
&= A_{\mu\nu}(\boldsymbol{a}) + \varepsilon\xi^\beta_{,\ \nu}A_{\mu\beta}(\boldsymbol{a}) + \varepsilon\xi^\alpha_{,\ \mu}A_{\alpha\nu}(\boldsymbol{a}) + \varepsilon A_{\mu\nu,\ \lambda}\xi^\lambda
\end{aligned}$$

よってこの結果をリー微分の定義式 (2) に代入して，

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\xi A_{\mu\nu} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{A_{\mu\nu\ P\to Q} - A_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}_P)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\cancel{A_{\mu\nu}(\boldsymbol{a})} + \varepsilon\xi^\beta_{,\ \nu}A_{\mu\beta}(\boldsymbol{a}) + \varepsilon\xi^\alpha_{,\ \mu}A_{\alpha\nu}(\boldsymbol{a}) + \varepsilon A_{\mu\nu,\ \lambda}\xi^\lambda - \cancel{A_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}_P)}}{\varepsilon} \\
&= \xi^\beta_{,\ \nu}A_{\mu\beta}(\boldsymbol{a}) + \xi^\alpha_{,\ \mu}A_{\alpha\nu}(\boldsymbol{a}) + A_{\mu\nu,\ \lambda}\xi^\lambda
\end{aligned}$$

よって 2 階の共変テンソルのリー微分は添字をそろえて整理すると，

$$\mathcal{L}_\xi A_{\mu\nu} = A_{\mu\nu,\ \lambda}\xi^\lambda + A_{\lambda\nu}\xi^\lambda_{,\ \mu} + A_{\mu\lambda}\xi^\lambda_{,\ \nu} \tag{17}$$

となることが分かった．この方法は計算手順を追えば分かるとおり任意のテンソルに対して計算を実行できる．