キリングベクトル

前回 2 階の共変テンソルのリー微分を求めた．そこでここでは同じく 2 階の共変テンソルである計量 $g_{\mu\nu}$ のリー微分を求めてみよう．まず前回の結果より，

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu,\,\lambda}\xi^\lambda + g_{\lambda\nu}\xi^\lambda_{,\,\mu} + g_{\mu\lambda}\xi^\lambda_{,\,\nu} \tag{1}$$

であるが，$g_{\mu\nu}$ は計量条件 $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$ を満たすから，共変微分の定義より，

$$\nabla_\rho g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu,\,\rho} - g_{\lambda\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\rho} - g_{\lambda\mu}\Gamma^\lambda_{\nu\rho} = 0$$

よって，

$$g_{\mu\nu,\,\rho} = g_{\lambda\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\rho} + g_{\lambda\mu}\Gamma^\lambda_{\nu\rho} \tag{2}$$

を (1) に代入すると，

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu,\,\lambda}\xi^\lambda + g_{\lambda\nu}\xi^\lambda_{,\,\mu} + g_{\mu\lambda}\xi^\lambda_{,\,\nu} \\
&= g_{\mu\nu,\,\rho}\xi^\rho + g_{\lambda\nu}\xi^\lambda_{,\,\mu} + g_{\mu\lambda}\xi^\lambda_{,\,\nu} \\
&= \left(g_{\lambda\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\rho} + g_{\lambda\mu}\Gamma^\lambda_{\nu\rho}\right)\xi^\rho + g_{\lambda\nu}\xi^\lambda_{,\,\mu} + g_{\mu\lambda}\xi^\lambda_{,\,\nu} \\
&= g_{\lambda\nu}\left(\xi^\lambda_{,\,\mu} + \Gamma^\lambda_{\mu\rho}\xi^\rho\right) + g_{\mu\lambda}\left(\xi^\lambda_{,\,\nu} + \Gamma^\lambda_{\nu\rho}\xi^\rho\right) \\
&= g_{\lambda\nu}\nabla_\mu\xi^\lambda + g_{\mu\lambda}\nabla_\nu\xi^\lambda
\end{aligned}$$

ここで再び計量条件 $\nabla_\mu g_{\lambda\nu} = 0$ より，

$$\nabla_\mu\left(g_{\lambda\nu}\xi^\lambda\right) = \left(\nabla_\mu g_{\lambda\nu}\right)\xi^\lambda + g_{\lambda\nu}\left(\nabla_\mu\xi^\lambda\right) = g_{\lambda\nu}\nabla_\mu\xi^\lambda \tag{3}$$

(つまり計量は共変微分に対して常に定数のように振舞う) だから，

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} &= g_{\lambda\nu}\nabla_\mu\xi^\lambda + g_{\mu\lambda}\nabla_\nu\xi^\lambda \\
&= \nabla_\mu\left(g_{\lambda\nu}\xi^\lambda\right) + \nabla_\nu\left(g_{\mu\lambda}\xi^\lambda\right) \\
&= \nabla_\mu\xi\nu + \nabla_\nu\xi_\mu
\end{aligned}$$

よって結局,

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \xi_{\nu;\,\mu} + \xi_{\mu;\,\nu} \tag{4}$$

が成り立つことが分かった．特にこの座標変換でテンソル場が不変だとすると，

$$\xi_{\nu;\,\mu} + \xi_{\mu;\,\nu} = 0 \tag{5}$$

が成り立つ．この式をキリング方程式といい，キリング方程式を満たすベクトル ξ_μ をキリングベクトルと呼ぶ.