一様等方空間のテンソル計算

この項では膨張宇宙の解として知られるアインシュタイン方程式の厳密解であるフリードマン解を求める準備として，ロバートソン・ウォーカー計量からそのアインシュタインテンソルまでを計算する．なお添字は，特に断らない限り，i や j などの英小文字は 1 から 3 までを走る変数とし，α や β などのギリシャ小文字は 0 から 3 までを走る変数とする．また上下に同じ添字がある場合は，アインシュタインの規約を用いその添字の走る範囲で和 $\sum$ を取るものとする．

ロバートソン・ウォーカー計量

まず，最初に一様等方空間の不変間隔は次の式で表されるのであった，

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a(t)^2\left(\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2d\theta + r^2\sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

これより，ロバートソンウォーカー計量の成分は，

$$g_{00} = g_{tt} = -1,\ g_{11} = g_{rr} = \frac{a(t)^2}{1-Kr^2},\ g_{22} = g_{\theta\theta} = a(t)^2r^2,\ g_{33} = g_{\varphi\varphi} = a(t)^2r^2\sin^2\theta,\ g_{\alpha\beta} = 0,\ (\alpha \neq \beta)$$

となることが分かる．計量の共変成分が対角行列なので，逆行列となる計量の反変成分は，対角成分を単に逆数を取るだけでよく，

$$g^{00} = g^{tt} = -1,\ g^{11} = g^{rr} = \frac{1-Kr^2}{a(t)^2},\ g^{22} = g^{\theta\theta} = \frac{1}{a(t)^2r^2},\ g^{33} = g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{a(t)^2r^2\sin^2\theta},\ g^{\alpha\beta} = 0,\ (\alpha \neq \beta)$$

となることになる．計量の成分が全て分かったので，

$$g_{\alpha\beta} \Longrightarrow \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \Longrightarrow R^\alpha_{\beta\gamma\delta} \Longrightarrow R_{\alpha\beta} \Longrightarrow G_{\alpha\beta}$$

の順にしたがって，アインシュタインテンソルまで求めることができる．

接続係数を求める

まず最初に接続係数クリストッフェル記号を求める．接続係数は計量を用いて，

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\omega}\left(\frac{\partial g_{\omega\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\omega\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\omega}\right) \tag{1}$$

と表される．なお，計量の行列は対称行列だから覚えやすいように添字の順番を入れ替えて，

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\omega}\left(\frac{\partial g_{\omega\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\omega}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\omega}\right)$$

のようにサイクリックな形にしてもよいだろう．

式 (1) を見ると，今回のように計量が対角成分のみの場合は，ω で和をとっている部分を α に固定してもよいことが分かるが，あいにくアインシュタインの規約により上下の添字は和をとることになっているので，表記はこのままとする．

クリストッフェル記号は添字が三つあり，それぞれの添字が 0 から 3 まで動くから，全部で $4^3 = 64$ 個の項からなる．しかし $\Gamma^\alpha_{\gamma\beta} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ の対称性があるため，実際には 40 個の成分を求めればよい訳だが，それでも十分項数は多い．幸い，今回のように計量が対角成分だけの場合は殆どの項が 0 になってしまうので，その辺の見極めが効率よく計算する鍵となる．今回は上についている添字の α の値別にそれぞれ考えてみよう．

0.1　$\alpha = 0$ の場合

まず，0 になる項を先に見つけてしまおう．接続係数は,

$$\Gamma^0_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{00} \left(\frac{\partial g_{0\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{0\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^0} \right) \tag{2}$$

である．ここで最後の項に着目すると，$\beta \neq \gamma$ のときは対角成分でないので 0 となることが分かる．と同時に，β か γ のいずれか片方は 0 でないから，例えば $\beta \neq 0$ としよう．すると，1 項目はやはり対角成分ではないので 0 になるので残るのは 2 項目のみとなる．ここでもし γ が 0 でなければ当然同じ理由で 2 項目も消え，全体が 0 になるのはすぐに分かる．ところがここで γ が 0 であっても実は 2 項目は 0 になる．何故なら，g_{00} は -1 で定数だから，何で微分しても 0 になるからである．ということは，全ての添字が 0 の場合も当然 0 になることになる．接続係数の下付添字に関しての対称性より結局求めるべき成分は Γ^0_{11}，Γ^0_{22}，Γ^0_{33} の 3 つだけでよいことになる．また $\beta = \gamma \neq 0$ なのだから，結局求めるべきは,

$$\Gamma^0_{ii} = \frac{1}{2} g^{00} \left(-\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^0} \right) = \frac{1}{2c} \frac{\partial g_{ii}}{\partial t} \tag{3}$$

となる．これを計算して,

$$\Gamma^0_{11} = \frac{a\dot{a}}{c(1-Kr^2)},\ \Gamma^0_{22} = \frac{a\dot{a}r^2}{c},\ \Gamma^0_{33} = \Gamma^0_{22} \sin^2\theta = \frac{a\dot{a}r^2 \sin^2\theta}{c}$$

を得る．

0.2　$\alpha = 1$ の場合

接続係数は,

$$\Gamma^1_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{1\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{1\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^1} \right) \tag{4}$$

である．先ほどと同じように $\beta \neq \gamma$ として最後の項を消そう．この条件で手前の 2 つの項が消えるためには，それぞれが非対角成分となる，$\beta \neq 1$ かつ $\gamma \neq 1$ つまり $(\beta,\ \gamma) = (0,\ 2),\ (0,\ 3),\ (2,\ 3)$ (順不同) か，片方が 1 で，もう片方が 0 と 1 以外の場合，つまり $(\beta,\ \gamma) = (1,\ 2),\ (1,\ 3)$ の場合である．$(\beta,\ \gamma) = (0,\ 0)$ の項は前の 2 項が非対角成分で，最後の項が $g_{00} = -1$ である定数の微分なのでこれも 0 となる．以上より計算すべきは，0 以外の対角成分 Γ^1_{11}，Γ^1_{22}，Γ^1_{33} と，$\Gamma^1_{10} = \Gamma^1_{01}$ のみでよいことが分かった．これを計算すると,

$$\Gamma^1_{11} = \frac{Kr}{1-Kr^2},\ \Gamma^1_{22} = -r(1-Kr^2),\ \Gamma^1_{33} = \Gamma^1_{22}\sin^2\theta = -r(1-Kr^2)\sin^2\theta,\ \Gamma^1_{01} = \frac{\dot{a}}{ca}$$

0.3　$\alpha = 2$ の場合

接続係数は,

$$\Gamma^2_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{2\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{2\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^2} \right) \tag{5}$$

である．まず，$\beta \neq \gamma$ として最後の項を消し，$\beta \neq 2,\ \gamma \neq 2$ とすると全ての項が消える．この条件は $(\beta,\ \gamma) = (0,\ 1),\ (0,\ 3),\ (1,\ 3)$（順不同）である．

次に手前の 2 項は g_{22} の偏微分となる．g_{22} は，t と r のみの関数だから，$x^2 = \theta$ と $x^3 = \varphi$ での微分だと全て消えてしまう．また最後の項も θ での偏微分だから，g_{00}，g_{11}，g_{22} であれば全て消えてしまう．この条件より $(\beta,\ \gamma) = (2,\ 2),\ (2,\ 3)$(順不同) であれば消えるし，$(\beta,\ \gamma) = (0,\ 0),\ (1,\ 1)$ であれば手前の 2 項は非対角成分なので消える．以上より求めるべき項は，Γ^2_{02}，Γ^2_{12}，Γ^2_{33} となる．これを計算して,

$$\Gamma^2_{02} = \frac{\dot{a}}{ca},\ \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r},\ \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta$$

0.4　$\alpha = 3$ の場合

最後に $\alpha = 3$ の場合を考えよう，この場合接続係数は,

$$\Gamma^3_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{33} \left(\frac{\partial g_{3\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{3\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^3} \right) = \frac{1}{2} g^{33} \left(\frac{\partial g_{3\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{3\gamma}}{\partial x^\beta} \right) \tag{6}$$

となるので，簡単である．まず，式の形より対角成分が残らないといけないので，β か γ のうち少なくとも一方は 3 でなくてはならない．またもう一方は g_{33} が $r,\ t,\ \theta$ の関数なので $x^3 = \varphi$ 以外の偏微分では 0 にならないこともすぐ分かる．よって対称性より求めるべき項は,

$$\Gamma^3_{03} = \frac{\dot{a}}{ca},\ \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r},\ \Gamma^3_{23} = \frac{1}{\tan\theta} = \cot\theta$$

以上をまとめると，接続係数のうち 0 でない成分は,

$$\begin{aligned}
&\Gamma^0_{11} = \frac{a\dot{a}}{c(1-Kr^2)},\ \Gamma^0_{22} = \frac{a\dot{a}r^2}{c},\ \Gamma^0_{33} = \Gamma^0_{22}\sin^2\theta = \frac{a\dot{a}r^2\sin^2\theta}{c}, \\
&\Gamma^1_{11} = \frac{Kr}{1-Kr^2},\ \Gamma^1_{22} = -r(1-Kr^2),\ \Gamma^1_{33} = \Gamma^1_{22}\sin^2\theta = -r(1-Kr^2)\sin^2\theta, \\
&\Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta, \\
&\Gamma^3_{23} = \frac{1}{\tan\theta} = \cot\theta, \\
&\Gamma^1_{01} = \Gamma^2_{02} = \Gamma^3_{03} = \frac{\dot{a}}{ca},\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r},
\end{aligned}$$

となることが分かった.

リッチテンソルを求める

接続係数が全て求まったので次は，リッチテンソルを求めよう．まず最初にリッチテンソルの定義は次のとおりである:

$$R_{\mu\nu} \overset{\mathrm{def}}{=} R^\sigma_{\mu\sigma\nu} = \partial_\sigma \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\sigma} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda\nu}$$

この計算を実行すると対角項のみが残り，非対角項は全て消えてしまう．実際,

$$\begin{aligned}
R_{01} &= \partial_\sigma \Gamma^\sigma_{01} - \partial_1 \Gamma^\sigma_{0\sigma} + \Gamma^\lambda_{01}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda 1} \\
&= \cancel{\partial_1 \Gamma^1_{01}} - \cancel{\partial_1 \Gamma^1_{01}} - \cancel{\partial_1 \Gamma^2_{02}} - \cancel{\partial_1 \Gamma^3_{03}} + \cancelto{1}{\Gamma^1_{01}\Gamma^1_{11}} + \cancelto{2}{\Gamma^1_{01}\Gamma^3_{13}} - \cancelto{1}{\Gamma^1_{01}\Gamma^1_{11}} - \cancel{\Gamma^2_{02}\Gamma^2_{21}} - \cancelto{2}{\Gamma^3_{03}\Gamma^3_{31}} \\
&= 0 \\
R_{02} &= \partial_\sigma \Gamma^\sigma_{02} - \partial_2 \Gamma^\sigma_{0\sigma} + \Gamma^\lambda_{02}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda 2} \\
&= \cancel{\partial_2 \Gamma^2_{02}} - \cancel{\partial_2 \Gamma^\sigma_{0\sigma}} + \cancelto{1}{\Gamma^2_{02}\Gamma^2_{22}} - \cancel{\Gamma^1_{01}\Gamma^1_{12}} - \cancelto{1}{\Gamma^2_{02}\Gamma^2_{22}} - \cancel{\Gamma^3_{03}\Gamma^3_{32}} \\
&= 0 \\
R_{03} &= \partial_\sigma \Gamma^\sigma_{03} - \partial_3 \Gamma^\sigma_{0\sigma} + \Gamma^\lambda_{03}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda 3} \\
&= \cancel{\partial_3 \Gamma^3_{03}} - \cancel{\partial_3 \Gamma^\sigma_{0\sigma}} + \cancelto{1}{\Gamma^3_{03}\Gamma^3_{33}} - \cancel{\Gamma^1_{01}\Gamma^1_{13}} - \cancel{\Gamma^2_{02}\Gamma^2_{23}} - \cancelto{1}{\Gamma^3_{03}\Gamma^3_{33}} \\
&= 0 \\
R_{12} &= \partial_\sigma \Gamma^\sigma_{12} - \partial_2 \Gamma^\sigma_{1\sigma} + \Gamma^\lambda_{12}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda 2} \\
&= \cancel{\partial_2 \Gamma^2_{12}} - \cancel{\partial_2 \Gamma^1_{11}} - \cancel{\partial_2 \Gamma^2_{12}} - \cancel{\partial_2 \Gamma^3_{13}} + \cancelto{1}{\Gamma^2_{12}\Gamma^2_{22}} + \cancelto{2}{\Gamma^2_{12}\Gamma^3_{23}} - \cancel{\Gamma^0_{11}\Gamma^1_{02}} - \cancel{\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{12}} - \cancelto{1}{\Gamma^2_{12}\Gamma^2_{22}} - \cancelto{2}{\Gamma^3_{13}\Gamma^3_{32}} \\
&= 0 \\
R_{13} &= \partial_\sigma \Gamma^\sigma_{13} - \partial_3 \Gamma^\sigma_{1\sigma} + \Gamma^\lambda_{13}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda 3} \\
&= \cancel{\partial_3 \Gamma^3_{13}} - \cancel{\partial_3 \Gamma^\sigma_{1\sigma}} + \cancel{\Gamma^3_{13}\Gamma^\sigma_{3\sigma}} - \cancel{\Gamma^0_{11}\Gamma^1_{03}} - \cancel{\Gamma^1_{10}\Gamma^0_{13}} - \cancel{\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{13}} - \cancel{\Gamma^2_{12}\Gamma^2_{23}} - \cancel{\Gamma^3_{13}\Gamma^3_{33}} \\
&= 0 \\
R_{23} &= \partial_\sigma \Gamma^\sigma_{23} - \partial_3 \Gamma^\sigma_{2\sigma} + \Gamma^\lambda_{23}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda 3} \\
&= \cancel{\partial_3 \Gamma^3_{23}} - \cancel{\partial_3 \Gamma^\sigma_{2\sigma}} + \cancel{\Gamma^3_{23}\Gamma^\sigma_{3\sigma}} - \cancel{\Gamma^0_{22}\Gamma^2_{03}} - \cancel{\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{13}} - \cancel{\Gamma^2_{20}\Gamma^0_{23}} - \cancel{\Gamma^2_{21}\Gamma^1_{23}} - \cancel{\Gamma^3_{23}\Gamma^3_{33}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

となり，非対角項は全て消える.

次に大切な対角成分を計算しよう.

$$
\begin{aligned}
R_{00} &= \partial_\sigma \Gamma^\sigma_{00} - \partial_0 \Gamma^\sigma_{0\sigma} + \Gamma^\lambda_{00}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda 0} \\
&= \cancel{\partial_\sigma \Gamma^\sigma_{00}} - \partial_0 \Gamma^1_{01} - \partial_0 \Gamma^2_{02} - \partial_0 \Gamma^3_{03} + \cancel{\Gamma^\lambda_{00}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma}} - \Gamma^1_{01}\Gamma^1_{10} - \Gamma^2_{02}\Gamma^2_{20} - \Gamma^3_{03}\Gamma^3_{30} \\
&= -\frac{3}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\dot{a}}{ca}\right) - 3\left(\frac{\dot{a}}{ca}\right)^2 \\
&= -\frac{3\ddot{a}}{c^2 a}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{11} &= \partial_\sigma \Gamma^\sigma_{11} - \partial_1 \Gamma^\sigma_{1\sigma} + \Gamma^\lambda_{11}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda 1} \\
&= \partial_0 \Gamma^0_{11} + \cancelto{1}{\partial_1 \Gamma^1_{11}} - \cancelto{1}{\partial_1 \Gamma^1_{11}} - \partial_1 \Gamma^2_{12} - \partial_1 \Gamma^3_{13} + \cancelto{2}{\Gamma^0_{11}\Gamma^1_{01}} + \Gamma^0_{11}\Gamma^2_{02} + \Gamma^0_{11}\Gamma^3_{03} + \cancelto{3}{\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11}} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^1_{11}\Gamma^3_{13} \\
&\quad - \cancelto{2}{\Gamma^0_{11}\Gamma^1_{01}} - \Gamma^1_{10}\Gamma^0_{11} - \cancelto{3}{\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11}} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{21} - \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{31} \\
&= \partial_0 \Gamma^0_{11} - \partial_1 \Gamma^2_{12} - \partial_1 \Gamma^3_{13} + \Gamma^0_{11}\Gamma^2_{02} + \Gamma^0_{11}\Gamma^3_{03} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^1_{11}\Gamma^3_{13} - \Gamma^1_{10}\Gamma^0_{11} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{21} - \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{31} \\
&= \frac{\dot{a}^2 + a\ddot{a}}{c^2(1-Kr^2)} + \cancelto{1}{\frac{2}{r^2}} + \frac{2\dot{a}^2}{c^2(1-Kr^2)} + \frac{2K}{1-Kr^2} - \frac{\dot{a}^2}{c^2(1-Kr^2)} - \cancelto{1}{\frac{2}{r^2}} \\
&= \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2Kc^2}{c^2(1-Kr^2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{22} &= \partial_\sigma \Gamma^\sigma_{22} - \partial_2 \Gamma^\sigma_{2\sigma} + \Gamma^\lambda_{22}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda 2} \\
&= \partial_0 \Gamma^0_{22} + \partial_1 \Gamma^1_{22} - \partial_2 \Gamma^3_{23} + \Gamma^0_{22}\Gamma^1_{01} + \cancelto{1}{\Gamma^0_{22}\Gamma^2_{02}} + \cancelto{2}{\Gamma^0_{22}\Gamma^3_{03}} + \Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11} + \cancelto{3}{\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{12}} + \cancelto{4}{\Gamma^1_{22}\Gamma^3_{13}} \\
&\quad - \cancelto{1}{\Gamma^0_{22}\Gamma^2_{02}} - \cancelto{3}{\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{12}} - \cancelto{2}{\Gamma^2_{20}\Gamma^0_{22}} - \cancelto{4}{\Gamma^2_{21}\Gamma^1_{22}} - \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{32} \\
&= \partial_0 \Gamma^0_{22} + \partial_1 \Gamma^1_{22} - \partial_2 \Gamma^3_{23} + \Gamma^0_{22}\Gamma^1_{01} + \Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11} - \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{32} \\
&= \frac{\dot{a}^2 r^2 + a\ddot{a} r^2}{c^2} - 1 + 3Kr^2 + \frac{1}{\sin^2\theta} + \frac{\dot{a}^2 r^2}{c^2} - Kr^2 - \cot^2\theta \\
&= \frac{r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2Kc^2)}{c^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{33} &= \partial_\sigma \Gamma^\sigma_{33} - \cancel{\partial_3 \Gamma^\sigma_{3\sigma}} + \Gamma^\lambda_{33}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda 3} \\
&= \partial_0 \Gamma^0_{33} + \partial_1 \Gamma^1_{33} + \partial_2 \Gamma^2_{33} + \cancelto{1}{\Gamma^0_{33}\Gamma^1_{01}} + \Gamma^0_{33}\Gamma^2_{02} + \cancelto{2}{\Gamma^0_{33}\Gamma^3_{03}} + \Gamma^1_{33}\Gamma^1_{11} + \cancelto{3}{\Gamma^1_{33}\Gamma^2_{12}} + \cancelto{4}{\Gamma^1_{33}\Gamma^3_{13}} + \cancelto{5}{\Gamma^2_{33}\Gamma^3_{23}} \\
&\quad - \cancelto{2}{\Gamma^0_{33}\Gamma^3_{03}} - \cancelto{4}{\Gamma^1_{33}\Gamma^3_{13}} - \cancelto{5}{\Gamma^2_{33}\Gamma^3_{23}} - \cancelto{1}{\Gamma^3_{30}\Gamma^0_{33}} - \cancelto{3}{\Gamma^3_{31}\Gamma^1_{33}} - \Gamma^3_{32}\Gamma^2_{33} \\
&= \partial_0 \Gamma^0_{33} + \partial_1 \Gamma^1_{33} + \partial_2 \Gamma^2_{33} + \Gamma^0_{33}\Gamma^2_{02} + \Gamma^1_{33}\Gamma^1_{11} - \Gamma^3_{32}\Gamma^2_{33} \\
&= \frac{r^2\sin^2\theta\left(\dot{a}^2 + a\ddot{a}\right)}{c^2} + \sin^2\theta(-1 + 3Kr^2) - \cancelto{1}{\cos^2\theta} + \sin^2\theta + \frac{\dot{a}^2 r^2 \sin^2\theta}{c^2} - Kr^2\sin^2\theta + \cancelto{1}{\cos^2\theta} \\
&= \frac{r^2\sin^2\theta(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2Kc^2)}{c^2}
\end{aligned}
$$

以上をまとめると，リッチテンソルは,

$$
R_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{c^2 a},\ R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2Kc^2}{c^2(1-Kr^2)},\ R_{22} = \frac{r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2Kc^2)}{c^2},\ R_{33} = \frac{r^2\sin^2\theta(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2Kc^2)}{c^2},\ R_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha \neq \beta)
$$

となることが分かった.

スカラー曲率を求める

リッチテンソルが求まったので，スカラー曲率を求めよう.

$$
\begin{aligned}
R &\overset{\text{def}}{=} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\
&= g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} \\
&= -\left(-\frac{3\ddot{a}}{c^2 a}\right) + \frac{\cancel{1-Kr^2}}{a^2}\left[\frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2Kc^2}{c^2\cancel{(1-Kr^2)}}\right] + \frac{1}{a^2\cancel{r^2}}\left[\frac{\cancel{r^2}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2Kc^2)}{c^2}\right] + \frac{1}{a^2\cancel{r^2\sin^2\theta}}\left[\frac{\cancel{r^2\sin^2\theta}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2Kc^2)}{c^2}\right] \\
&= \frac{6}{c^2}\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2}\right)
\end{aligned}
$$

アインシュタインテンソルを求める

最後にアインシュタインテンソルを求めよう．

$$
\begin{aligned}
G_{00} &= R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R \\
&= -\frac{3\ddot{a}}{c^2 a} + \frac{1}{2} \times (-1) \times \left[\frac{6}{c^2}\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2}\right)\right] \\
&= \frac{3}{c^2}\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2}\right) \\
G_{11} &= R_{11} - \frac{1}{2}g_{11}R \\
&= \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2Kc^2}{c^2(1-Kr^2)} - \frac{1}{2} \times \frac{a^2}{1-Kr^2} \times \frac{6}{c^2}\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2}\right) \\
&= -\frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + Kc^2}{c^2(1-Kr^2)} \\
&= -\frac{g_{11}}{c^2}\left(\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{Kc^2}{a^2}\right) \\
G_{22} &= R_{22} - \frac{1}{2}g_{22}R \\
&= \frac{r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2Kc^2)}{c^2} - \frac{1}{2} \times a^2r^2 \times \left[\frac{6}{c^2}\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2}\right)\right] \\
&= -\frac{2a\ddot{a}r^2 + \dot{a}^2r^2 + Kc^2r^2}{c^2} \\
&= -\frac{g_{22}}{c^2}\left(\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{Kc^2}{a^2}\right) \\
G_{33} &= R_{33} - \frac{1}{2}g_{33}R \\
&= \frac{r^2\sin^2\theta(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2Kc^2)}{c^2} - \frac{1}{2} \times \left(a^2r^2\sin^2\theta\right) \times \left[\frac{6}{c^2}\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2}\right)\right] \\
&= -\frac{r^2\sin^2\theta\left(2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + Kc^2\right)}{c^2} \\
&= -\frac{g_{33}}{c^2}\left(\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{Kc^2}{a^2}\right)
\end{aligned}
$$

となる．次回は早速膨張宇宙の解であるフリードマン解を求めてみよう．