## 0.1　一様等方空間の世界間隔

この節では，一様等方空間の微小距離 $dl$ を求める．これは世界間隔の空間成分だけを取り出して，一様等方性を満たす 3 次元空間の計量を求めることにほかならない．まず最初に微小距離 $dl$ を表してみると，

$$dl^2 = C(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \tag{1}$$

が成り立つ．ただし，ここでは話を簡単にするために，計量は $r$ のみの関数とした．このようにして求められた計量は, のちに時間発展する時空の計量に用意に修正できるので心配はいらない．我々は，一様等方空間ではスカラー曲率は空間のどの点でも等しいはずであるということを用いて，この定曲率空間の計量を求める．

まず計量は (1) より，

$$\begin{aligned}
g_{11} &= g_{rr} = C(r), \\
g_{22} &= g_{\theta\theta} = r^2, \\
g_{33} &= g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\theta = \sin^2\theta g_{22},
\end{aligned}$$

と表される．ここで『あれ？』と思ったひとは，慎重であろう．計量の成分を空間成分の 3 次元分しか用意していないけどそれでいいのか？　という疑問である．

しかし，この計量は対角行列だから，

$$\begin{aligned}
g^{11} &= g^{rr} = \frac{1}{C(t,\, r)}, \\
g^{22} &= g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}, \\
g^{33} &= g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta} g^{22},
\end{aligned}$$

となる．これより接続係数を求める．

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il}(g_{lj,k} + g_{lk,j} - g_{kj,l})$$

だから,

### 0.1.1　$i = 1$ のとき

$$\Gamma^1_{jk} = \frac{1}{2} g^{11}(g_{1j,k} + g_{1k,j} - g_{kj,1})$$

だから,

$j \neq k$ のとき

$$\Gamma^1_{jk} = \frac{1}{2} g^{11}(g_{1j,k} + g_{1k,j} - g_{kj,1}) = \frac{1}{2} g^{11}(g_{1j,k} + g_{1k,j})$$

より，$j$ か $k$ の少なくとも一方は 1 でなければ $\Gamma^1_{jk} = 0$ となる．$j = 1$ とすると，$k = 2$, $or$ 3 であるが，$g_{rr}$ は $r$ と $t$ のみの関数だから，結局，このとき $\Gamma^1_{jk} = 0$ となる．

$j = k$ のとき

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} g^{11}(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}) = \frac{1}{2} \frac{C'}{C}$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2} g^{11}(g_{12,2} + g_{12,2} - g_{22,1}) = -\frac{1}{2} \frac{2r}{C} = -\frac{r}{C}$$

$$\Gamma^1_{33} = \frac{1}{2} g^{11}(g_{13,3} + g_{13,3} - g_{33,1}) = -\frac{1}{2} \frac{2r \sin^2\theta}{C} = -\frac{r}{C} \sin^2\theta$$

### 0.1.2　$i=2$ のとき

$$\Gamma^2_{jk}=\frac{1}{2}g^{22}(g_{2j,k}+g_{2k,j}-g_{kj,2})$$

$j\neq k$ のとき

$$\Gamma^2_{jk}=\frac{1}{2}g^{22}(g_{2j,k}+g_{2k,j}-g_{kj,2})=\frac{1}{2}g^{22}(g_{2j,k}+g_{2k,j})$$

であるが，$j$ か $k$ の少なくとも一方は 2 でないと計量が対角成分にならないから 0 になる．また，もう片方は 3 だとすると，計量が $x^3=\varphi$ を含まないので，それでの微分は 0 になる．以上により，0 でない成分は，

$$\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\frac{1}{2}g^{22}(g_{22,1})=\frac{1}{2}\frac{2r}{r^2}=\frac{1}{r}$$

となりそれ以外は，全て 0 となる．

$j=k$ のとき

$$\Gamma^2_{11}=\frac{1}{2}g^{22}(g_{21,1}+g_{21,1}-g_{11,2})=0$$

$$\Gamma^2_{22}=\frac{1}{2}g^{22}(g_{22,2}+g_{22,2}-g_{22,2})=0$$

$$\Gamma^2_{33}=\frac{1}{2}g^{22}(g_{23,3}+g_{23,3}-g_{33,2})=-\frac{1}{2}\frac{2r^2\sin\theta\cos\theta}{r^2}=-\sin\theta\cos\theta$$

### 0.1.3　$i=3$ のとき

$$\Gamma^3_{jk} = \frac{1}{2}g^{33}(g_{3j,k}+g_{3k,j}-g_{kj,3}) = \frac{1}{2}g^{33}(g_{3j,k}+g_{3k,j})$$

だから $j$ と $k$ の少なくとも一方は 3 でなければならない．このときもう一方まで 3 だとすると，$x^3=\varphi$ の微分によって全て消えてしまうから，もう一方は 1 か 2 であるときに限り 0 でない．よって，

$$\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{2}g^{33}(g_{33,1}) = \frac{1}{2}\frac{2r\sin^2\theta}{r^2\sin^2\theta} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \frac{1}{2}g^{33}(g_{33,2}) = \frac{1}{2}\frac{2r^2\sin\theta\cos\theta}{r^2\sin^2\theta} = \frac{1}{\tan\theta} = \cot\theta$$

以上より，0 でない成分は,

接続係数の 0 でない成分

$$\begin{aligned}
&\Gamma^1_{11} = -\frac{1}{2}\frac{C'}{C},\ \Gamma^1_{22} = -\frac{r}{C},\ \Gamma^1_{33} = -\frac{r}{C}\sin^2\theta,\\
&\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r},\ \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta,\\
&\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r},\ \Gamma^3_{23} = \frac{1}{\tan\theta} = \cot\theta,
\end{aligned}$$

これを用いて，リッチテンソルを求めよう．まず，リッチテンソルの定義は,

$$R_{mn} \overset{\text{def}}{=} R^k_{mkn} = \Gamma^k_{mn,k} - \Gamma^k_{mk,n} + \Gamma^l_{mn}\Gamma^k_{lk} - \Gamma^l_{mk}\Gamma^k_{ln}$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
R_{11} =& \varGamma^k_{11,k} - \varGamma^k_{1k,1} + \varGamma^l_{11}\varGamma^k_{lk} - \varGamma^l_{1k}\varGamma^k_{l1} \\
=& \cancel{\varGamma^1_{11,1}} - \cancel{\varGamma^1_{11,1}} - \varGamma^2_{12,1} - \varGamma^3_{13,1} + \cancel{\varGamma^1_{11}\varGamma^1_{11}} + \varGamma^1_{11}\varGamma^2_{12} + \varGamma^1_{11}\varGamma^3_{13} \\
& - \cancel{\varGamma^1_{11}\varGamma^1_{11}} - \varGamma^2_{12}\varGamma^2_{21} - \varGamma^3_{13}\varGamma^3_{31} \\
=& \cancel{\frac{1}{r^2}} + \cancel{\frac{1}{r^2}} - \frac{1}{2}\frac{C'}{C}\frac{1}{r} - \frac{1}{2}\frac{C'}{C}\frac{1}{r} - \cancel{\frac{1}{r^2}} - \cancel{\frac{1}{r^2}} \\
=& -\frac{1}{r}\frac{C'}{C}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{22} =& \varGamma^k_{22,k} - \varGamma^k_{2k,2} + \varGamma^l_{22}\varGamma^k_{lk} - \varGamma^l_{2k}\varGamma^k_{l2} \\
=& \varGamma^1_{22,1} - \varGamma^3_{23,2} + \varGamma^1_{22}\varGamma^1_{11} + \cancel{\varGamma^1_{22}\varGamma^2_{12}} + \varGamma^1_{22}\varGamma^3_{13} - \cancel{\varGamma^1_{22}\varGamma^2_{12}} \\
& - \varGamma^2_{21}\varGamma^1_{22} - \varGamma^3_{23}\varGamma^3_{32} \\
=& -\frac{1}{C} + r\frac{C'}{C^2} + \frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{r}{C}\left(-\frac{1}{2}\frac{C'}{C}\right) - \frac{r}{C}\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\left(-\frac{r}{C}\right) - \cot^2\theta \\
=& -\frac{1}{C} + r\frac{C'}{C^2} + \frac{1}{\sin^2\theta} + \frac{1}{2}r\frac{C'}{C^2} \cancel{-\frac{1}{C}} + \cancel{\frac{1}{C}} - \cot^2\theta \\
=& \frac{3}{2}r\frac{C'}{C^2} - \frac{1}{C} + 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{33} =& \varGamma^k_{33,k} - \varGamma^k_{3k,3} + \varGamma^l_{33}\varGamma^k_{lk} - \varGamma^l_{3k}\varGamma^k_{l3} \\
=& \varGamma^1_{33,1} + \varGamma^2_{33,2} \\
& + \varGamma^1_{33}\varGamma^1_{11} + \varGamma^1_{33}\varGamma^2_{12} + \cancel{\varGamma^1_{33}\varGamma^3_{13}} + \cancel{\varGamma^2_{33}\varGamma^3_{23}} \\
& - \cancel{\varGamma^1_{33}\varGamma^3_{13}} - \cancel{\varGamma^2_{33}\varGamma^3_{23}} - \varGamma^3_{31}\varGamma^1_{33} - \varGamma^3_{32}\varGamma^2_{33} \\
=& \left(-\frac{1}{C} + \frac{rC'}{C^2}\right)\sin^2\theta - \cancel{\cos^2\theta} + \sin^2\theta + \left(-\frac{r}{C}\sin^2\theta\right)\left(-\frac{1}{2}\frac{C'}{C}\right) \\
& + \cancel{\left(-\frac{r}{C}\sin^2\theta\right)\times\frac{1}{r}} - \cancel{\frac{1}{r}\left(-\frac{r}{C}\sin^2\theta\right)} - \cancel{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\times(-\sin\theta\cos\theta)} \\
=& \left(-\frac{1}{C} + \frac{rC'}{C^2}\right)\sin^2\theta + \sin^2\theta + \left(-\frac{r}{C}\sin^2\theta\right)\left(-\frac{1}{2}\frac{C'}{C}\right) \\
=& \left(\frac{3}{2}\frac{rC'}{C^2} - \frac{1}{C} + 1\right)\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R =& g^{mn}R_{mn} \\
=& g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} \\
=& \frac{1}{C}\left(-\frac{1}{r}\frac{C'}{C}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{3}{2}r\frac{C'}{C^2} - \frac{1}{C} + 1\right) \\
& + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{3}{2}\frac{rC'}{C^2} - \frac{1}{C} + 1\right)\sin^2\theta \\
=& \frac{2}{r}\left(\frac{C'}{C^2} - \frac{1}{rC} + \frac{1}{r}\right)
\end{aligned}
$$

いま，空間が等方で一様だとするとスカラー曲率が空間のどの点でも一定なので，$6k \equiv R$ と置くと，

$$
6k = \frac{2}{r}\left(\frac{C'}{C^2} - \frac{1}{rC} + \frac{1}{r}\right)
$$

これより，

$$
3kr^2 = \frac{rC'}{C^2} - \frac{1}{C} + 1 = -\left(\frac{r}{C}\right)' + 1
$$

なのでこの微分方程式を解くと，

$$
r - kr^3 = \frac{r}{C}
$$

より，

$$
C = \frac{1}{1 - kr^2}
$$

が得られる．