太陽の重力による星の光の湾曲を求める

ここでは 1919 年 5 月 29 日の日食におけるアーサー・エディントン卿らによる観測チームによって確かめられた，太陽の重力による星の光の屈折現象の一般相対論的解を導く．歴史的にはこの観測以降一般相対論が広く知られるようになった.

シュヴァルツシルト解の復習

まず最初にシュヴァルツシルト解の復習から始めよう．シュヴァルツシルト解は天文学者カール・シュヴァルツシルトが，一様密度，球対称，静的に物質が分布しているという仮定から導いた時空の解である．近年一般的にシュヴァルツシルトブラックホールの解として有名であるが，シュヴァルツシルト本人はブラックホールのような特殊な天体を想定して導いたものではなく，ごく普通の天体を想定して導いたようである．従ってよく誤解されるようにブラックホールにしか適用できないような解ではなく，一般の天体 (ほぼ球対称と考えられる) の作る重力場による時空の歪みにも適応できる．ここではシュヴァルツシルトブラックホールと一般の天体の作る時空の歪みの違いについて注意しながらこのシュヴァルツシルトの解を考えてみよう.

シュヴァルツシルトの解は次の式で表される:

$$ds^2 = -(1 - r_g/r)dw^2 + \frac{dr^2}{1 - r_g/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \tag{1.1}$$

$$\text{但し，} r_g = \frac{2GM}{c^2}, \tag{1.2}$$

である．ここで厳密には r は動径方向に距離によって異なる伸び縮み係数をかけた長さだから厳密に言えば，この解は球座標表示したものとは異なる．とはいえこの解は $r \to \infty$ で球座標で表示した，ミンコフスキー時空,

$$ds^2 = -dw^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \tag{1.3}$$

に急激に近づくから，今回のように太陽の半径 $R_\odot = 6.96 \times 10^8 m$ と，そのシュヴァルツシルト半径 $r_g = \dfrac{2GM_\odot}{c^2} = 2.954 \times 10^3 m$ との約 $100,000$ 倍のオーダーで離れたところを議論する限りにおいては，r はほぼ球座標のそれとみなして問題は無い．またシュヴァルツシルトブラックホールは，太陽の質量 $M_\odot$ が全てこの約 $3km$ となる太陽のシュヴァルツシルト半径 r_g 内に分布している場合に起きることなので，現実の太陽には当てはまらないことにも注意しよう.

星の光の進む経路を表す方程式

測地線方程式

一般相対論において，曲がった空間内をまっすぐに進む直線の軌跡は測地線の式,

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\sigma^2} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\sigma}\frac{dx^\gamma}{d\sigma} = 0, \qquad (\alpha = 0,\, 1,\, 2,\, 3) \tag{1.4}$$

によって表せる．ここで微分に使っているパラメータ σ は何でもよいが，通常の物体の運動を考える場合には固有時 τ を使うのが便利で，そのときこの測地線の方程式は相対論的運動方程式になる．しかし，いま我々が扱うのは，星の光の軌跡であり，光の運動はヌル $ds^2 = 0$ を満たすから，$-c^2d\tau^2 = ds^2 = 0$ より，$d\tau = 0$ となってしまうので使うことは出来ない．そこで取り敢えず，σ は単なるパラメータとしてとっておき，後でこのパラメータが消えるように計算を進めることにしよう.

測地線の方程式の係数

さて測地線の方程式を求めるには，全ての $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ を求めなければならない．ここで，シュヴァルツシルト解 (1.1) より，全ての $g_{\mu\nu}$ が分かっているから，計量による接続係数の表示式,

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\omega}\left(\frac{\partial g_{\omega\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\omega\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\omega}\right), \tag{1.5}$$

を用いれば全ての $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ が求められるので，この記事を独立した記事として読まれる方は面倒だが，(1.5) を用いて $g_{\mu\nu}$，g $^{\mu\nu}$ を用いて計算してみるとよいだろう．(なお当たり前だが行列 $(g^{\mu\nu})$ は行列 $(g_{\mu\nu})$ の逆行列だから，今回のように $(g_{\mu\nu})$ が対角行列の場合，$g_{\mu\nu}$ の逆数をとるだけでよい.)

ここではシュヴァルツシルト解を求める途中に既に接続係数についてはほぼ全て求めてあるのでそれを流用することにする．拙著:「シュヴァルツシルトの外部解の導出 (1)」に，0 でない接続係数は全て求めてあり，次の通りである:

$$\Gamma^0{}_{10} = \Gamma^0{}_{01} = \frac{1}{2}\frac{d\nu(r)}{dr}, \tag{1.6}$$

$$\Gamma^1{}_{00} = \frac{1}{2}\frac{d\nu(r)}{dr}e^{\nu(r)-\lambda(r)}, \tag{1.7}$$

$$\Gamma^1{}_{11} = \frac{1}{2}\frac{d\lambda(r)}{dr}, \tag{1.8}$$

$$\Gamma^1{}_{22} = -re^{-\lambda(r)}, \tag{1.9}$$

$$\Gamma^1{}_{33} = -re^{-\lambda(r)}\sin^2\theta, \tag{1.10}$$

$$\Gamma^2{}_{12} = \Gamma^2{}_{21} = \frac{1}{r}, \tag{1.11}$$

$$\Gamma^2{}_{33} = -\sin\theta\cos\theta, \tag{1.12}$$

$$\Gamma^3{}_{13} = \Gamma^3{}_{31} = \frac{1}{r}, \tag{1.13}$$

$$\Gamma^3{}_{23} = \Gamma^3{}_{32} = \cot\theta, \qquad \left(= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) \tag{1.14}$$

ここで，同じ記事:「シュヴァルツシルトの外部解の導出 (1)」の最初の ds^2 の式が結局式 (1.1) に一致するのであるから，

$$ds^2 = -e^{\nu(r)}dw^2 + e^{\lambda(r)}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2 \tag{1.15}$$

$$= -(1 - r_g/r)dw^2 + \frac{dr^2}{1 - r_g/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \tag{1.16}$$

より，

$$-e^{\nu(r)} = -(1 - r_g/r), \tag{1.17}$$

$$e^{\lambda(r)} = \frac{1}{1 - r_g/r}, \tag{1.18}$$

が成り立つから，

$$\frac{d}{dr}e^{\nu(r)} = e^{\nu(r)}\frac{d\nu(r)}{dr} = r_g/r^2, \tag{1.19}$$

$$\therefore \quad \frac{d\nu(r)}{dr} = r_g/r^2 e^{-\nu(r)} = \frac{r_g}{r^2}\frac{1}{1 - r_g/r}, \tag{1.20}$$

また，

$$e^{-\lambda(r)} = 1 - r_g/r, \tag{1.21}$$

より，

$$-\frac{d\lambda(r)}{dr}e^{-\lambda(r)} = r_g/r^2, \tag{1.22}$$

より，

$$\frac{d\lambda(r)}{dr} = -r_g/r^2 e^{\lambda(r)} = -\frac{r_g}{r^2}\frac{1}{1 - r_g/r}, \tag{1.23}$$

だから，(1.6)，(1.7)，(1.8)，(1.9)，(1.10) に代入すると，

$$\Gamma^0{}_{10} = \Gamma^0{}_{01} = \frac{r_g}{2r^2}\frac{1}{1-r_g/r}, \tag{1.6'}$$

$$\Gamma^1{}_{00} = \frac{r_g}{2r^2}(1-r_g/r), \tag{1.7'}$$

$$\Gamma^1{}_{11} = -\frac{r_g}{2r^2}\frac{1}{1-r_g/r}, \tag{1.8'}$$

$$\Gamma^1{}_{22} = -r(1-r_g/r), \tag{1.9'}$$

$$\Gamma^1{}_{33} = -r(1-r_g/r)\sin^2\theta, \tag{1.10'}$$

を得る．従って測地線の方程式 (1.4) に代入すると，規約に注意すると，

$$\frac{d^2\omega}{d\sigma^2} + \frac{r_g}{r^2}\frac{1}{1-r_g/r}\frac{d\omega}{d\sigma}\frac{dr}{d\sigma} = 0 \tag{1.24}$$

$$\frac{d^2r}{d\sigma^2} + \frac{r_g}{2r^2}(1-r_g/r)\left(\frac{d\omega}{d\sigma}\right)^2 - \frac{r_g}{2r^2}\frac{1}{1-r_g/r}\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 - r(1-r_g/r)\left(\frac{d\theta}{d\sigma}\right)^2 - r(1-r_g/r)\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2 = 0, \tag{1.25}$$

$$\frac{d^2\theta}{d\sigma^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{d\sigma}\frac{d\theta}{d\sigma} - \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2 = 0 \tag{1.26}$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\sigma^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{d\sigma}\frac{d\varphi}{d\sigma} + 2\cot\theta\frac{d\theta}{d\sigma}\frac{d\varphi}{d\sigma} = 0 \tag{1.27}$$

が得られる．

さて，この方程式は 3 次元空間内のどの点から光線が発射されたとしても使える式だから，式を簡単にするために，光線の軌跡を xy 平面に制限しよう．球対称な時空だからこのようなことが物理的に許される．すると，これは式の上では $\theta = \frac{\pi}{2}$ ととったことになる．このときの測地線の方程式は，$d\theta = 0$ に注意すると，

$$\frac{d^2\omega}{d\sigma^2} + \frac{r_g}{r^2}\frac{1}{1-r_g/r}\frac{d\omega}{d\sigma}\frac{dr}{d\sigma} = 0, \tag{1.28}$$

$$\frac{d^2r}{d\sigma^2} + \frac{r_g}{2r^2}(1-r_g/r)\left(\frac{d\omega}{d\sigma}\right)^2 - \frac{r_g}{2r^2}\frac{1}{1-r_g/r}\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 - r(1-r_g/r)\left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2 = 0, \tag{1.29}$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\sigma^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{d\sigma}\frac{d\varphi}{d\sigma} = 0, \tag{1.30}$$

となる．ここでこれら 3 つの微分方程式を解きたいが，よく見ると (1.28) と (1.30) は，

$$p \equiv \frac{d\omega}{d\sigma}, \quad f(r) \equiv \frac{r_g}{r^2}\frac{1}{1-r_g/r}, \tag{1.31}$$

$$q \equiv \frac{d\varphi}{d\sigma}, \quad g(r) \equiv \frac{2}{r}, \tag{1.32}$$

と置けば，それぞれ，

$$\frac{dp}{d\sigma} + f(r)\frac{dr}{d\sigma}p = 0, \tag{1.33}$$

$$\frac{dq}{d\sigma} + g(r)\frac{dr}{d\sigma}q = 0, \tag{1.34}$$

となり両者は全く同じ形の式となっている．そこでこの一般形の微分方程式 (1.33) を解いて，後から，条件式 (1.31)，(1.32) を用いて，最終的な形を導こう．

いま，微分方程式 (1.33) において，$f(r)$ の原始関数を $F(r)$ と置く．即ち，

$$\frac{dF(r)}{dr} = f(r), \tag{1.35}$$

とすると，

$$f(r)\frac{dr}{d\sigma} = \frac{dF(r)}{dr}\frac{dr}{d\sigma} = \frac{dF(r)}{d\sigma}, \tag{1.36}$$

となるから，(1.33) 式は，

$$0 = \frac{dp}{d\sigma} + f(r)\frac{dr}{d\sigma}p = \frac{dp}{d\sigma} + \frac{dF(r)}{d\sigma}p, \tag{1.37}$$

より，

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{d\sigma} = -\frac{dF(r)}{d\sigma}, \tag{1.38}$$

つまり，

$$\frac{1}{p}dp = -dF(r), \tag{1.39}$$

だからこれより，

$$\ln|p| = -F(r) + C'' = -\int f(r)dr + C', \tag{1.40}$$

つまり，

$$p = C\exp\left(-\int f(r)dr\right) \tag{1.41}$$

が一般解となる．但し C は積分定数である．これより，式 (1.31) は,

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{d\sigma} &= p && (1.42)\\
&= C\exp\left(-\int f(r)dr\right) && (1.43)\\
&= C\exp\left(-\int \frac{r_g}{r^2}\frac{1}{1-r_g/r}dr\right) && (1.44)\\
&= C\exp\left(-\int \frac{(1-r_g/r)'}{1-r_g/r}dr\right) && (1.45)\\
&= C\exp\left(-\ln|1-r_g/r|\right) && (1.46)\\
&= C\exp\left[\ln\left(\frac{1}{|1-r_g/r|}\right)\right] && (1.47)\\
&= C\frac{1}{1-r_g/r}, && (1.48)
\end{aligned}$$

つまり，

$$\frac{d\omega}{d\sigma} = C\frac{1}{1-r_g/r}, \tag{1.49}$$

となる．ここで積分定数は随時まとめるなどして変更してある．

ここでさらに σ が任意のパラメータであることに注意すると，例えば $\sigma' = C\sigma$ を新しいパラメータと置けば, (1.49) は,

$$C\frac{1}{1-r_g/r} = \frac{d\omega}{d\sigma} = C\frac{d\omega}{d\sigma'}, \tag{1.50}$$

より容易にこの積分定数を消すことが出来るので，σ はあらかじめそのように選んでおこう．これにより，(1.28) は,

$$\frac{d\omega}{d\sigma} = \frac{1}{1-r_g/r}, \tag{1.51}$$

同様に (1.30) は,

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi}{d\sigma} &= q && (1.52)\\
&= D\exp\left(-\int g(r)dr\right) && (1.53)\\
&= D\exp\left(-\int \frac{2}{r}dr\right) && (1.54)\\
&= D\exp\left(-2\ln|r|\right) && (1.55)\\
&= D\exp\left[\ln\left(\frac{1}{r^2}\right)\right] && (1.56)\\
&= D\frac{1}{r^2}, && (1.57)
\end{aligned}$$

となる．ここで注意すべきは既に σ を $\dfrac{d\omega}{d\sigma}$ を求める際に調節してしまっているから，こんどはこの積分定数 D は消すことは出来ないということである．以上により次の結果が得られた:

$$\frac{d\omega}{d\sigma} = \frac{1}{1-r_g/r}, \tag{1.58}$$

$$\frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{D}{r^2}, \tag{1.59}$$

この二つを式 (1.29) に代入すると，

$$0 = \frac{d^2r}{d\sigma^2} + \frac{r_g}{2r^2}(1-r_g/r)\left(\frac{d\omega}{d\sigma}\right)^2 - \frac{r_g}{2r^2}\frac{1}{1-r_g/r}\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 - r(1-r_g/r)\left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2 \tag{1.60}$$

$$= \frac{d^2r}{d\sigma^2} + \frac{r_g}{2r^2}(1-r_g/r)\left(\frac{1}{1-r_g/r}\right)^2 - \frac{r_g}{2r^2}\frac{1}{1-r_g/r}\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 - r(1-r_g/r)\left(\frac{D}{r^2}\right)^2 \tag{1.61}$$

$$= \frac{d^2r}{d\sigma^2} + \frac{r_g}{2r^2}\frac{1}{1-r_g/r}\left[1-\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2\right] - \frac{D^2}{r^3}(1-r_g/r), \tag{1.62}$$

よって，

$$\frac{d^2r}{d\sigma^2} + \frac{r_g}{2r^2}\frac{1}{1-r_g/r}\left[1-\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2\right] - \frac{D^2}{r^3}(1-r_g/r) = 0, \tag{1.63}$$

が得られた．

さて，既に光の進む軌道はヌル，$ds^2 = 0$ を通るといったが，まだこの条件を用いていなかった．即ち，シュヴァルツシルト解 (1.1)

$$ds^2 = -(1-r_g/r)dw^2 + \frac{dr^2}{1-r_g/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \tag{1.64}$$

$$\text{但し，}\ r_g = \frac{2GM}{c^2}, \tag{1.65}$$

において，今まで通り条件 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ $(\therefore d\theta = 0)$ を課した上で $ds^2 = 0$ として両辺を $d\sigma^2$ で割ってみると，

$$0 = -(1-r_g/r)\left(\frac{dw}{d\sigma}\right)^2 + \frac{1}{1-r_g/r}\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2, \tag{1.66}$$

この式に，(1.58) 及び (1.59) を代入すると，

$$0 = -(1-r_g/r)\left(\frac{1}{1-r_g/r}\right)^2 + \frac{1}{1-r_g/r}\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 + r^2\left(\frac{D}{r^2}\right)^2 \tag{1.67}$$

$$= -\frac{1}{1-r_g/r} + \frac{1}{1-r_g/r}\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 + \frac{D^2}{r^2} \tag{1.68}$$

$$= -\frac{1}{1-r_g/r}\left[1-\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2\right] + \frac{D^2}{r^2}, \tag{1.69}$$

従って，

$$\frac{1}{1-r_g/r}\left[1-\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2\right] = \frac{D^2}{r^2}, \tag{1.70}$$

が得られた．この式の左辺の形はよく見ると式 (1.63) のなかに現れているので，該当箇所をこの式の右辺で置き換えてやると，

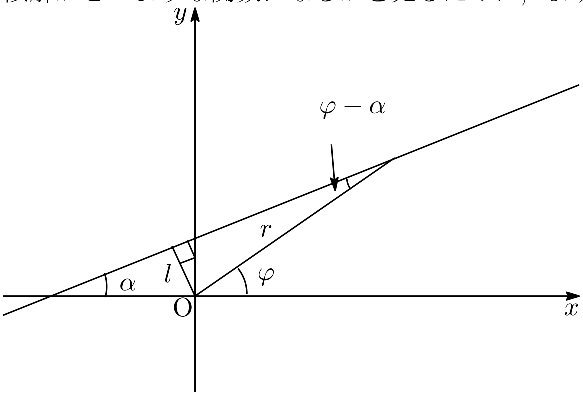
$$0 = \frac{d^2r}{d\sigma^2} + \frac{r_g}{2r^2}\frac{D^2}{r^2} - \frac{D^2}{r^3}(1-r_g/r) = \frac{d^2r}{d\sigma^2} + \frac{D^2r_g}{2r^4} - \frac{D^2}{r^3} + \frac{D^2r_g}{r^4} = \frac{d^2r}{d\sigma^2} + \frac{3}{2}\frac{D^2r_g}{r^4} - \frac{D^2}{r^3} \tag{1.71}$$

これより，

$$-\frac{d^2r}{d\sigma^2} + \frac{D^2}{r^3} = \frac{3}{2}\frac{D^2r_g}{r^4}, \tag{1.72}$$

が得られた．

ここで光線の軌跡が大雑把に言ってどのようになるか考えてみよう．いま，太陽表面付近の重力は，光が激しく屈折するには弱過ぎるため，解は直線の解に摂動を加えた解でほぼ充分であると考えられる．そこでこの近似解がどのような関数になるかを見るために，まず r を φ の関数としてみた場合の直線の方程式を考えてみる:



上の図から，関係式,

$$r \sin(\varphi - \alpha) = l \tag{1.73}$$

だから,

$$\frac{1}{r} = \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{l}, \tag{1.74}$$

が得られる．この式は全く光線が屈折しないので，当然，近似計算してこの解が得られた場合，全く役に立たない意味のない近似の荒すぎる解となる．しかし我々の求める解はこれに摂動項を加えた解になると考えられるので,

$$u \equiv \frac{1}{r}, \tag{1.75}$$

と置こう．あえて r の逆数をとったのは 0 次近似解 (と想定される) 解に現れる sin 関数が分子のほうが簡単に扱えるであろうという想定があるからであるが，この辺は後知恵であってこうすると上手くいくからという以上の意味はあまりないだろう．

さて，(1.75) より,

$$r = \frac{1}{u}, \tag{1.76}$$

だから，両辺を σ で微分してやると,

$$\frac{dr}{d\sigma} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\sigma}, \tag{1.77}$$

もう一回 σ で微分すると,

$$\frac{d^2r}{d\sigma^2} = \frac{2}{u^3}\left(\frac{du}{d\sigma}\right)^2 - \frac{1}{u^2}\frac{d^2u}{d\sigma^2}, \tag{1.78}$$

が得られるが，いま，(1.59) 式,

$$\frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{D}{r^2} = Du^2, \tag{1.79}$$

を用いると,

$$\frac{du}{d\sigma} = \frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{d\sigma} = Du^2\frac{du}{d\varphi} \tag{1.80}$$

及び,

$$\frac{d^2u}{d\sigma^2} = 2Du\frac{du}{d\sigma}\frac{d\varphi}{d\sigma} + Du^2\frac{d^2u}{d\varphi^2}\frac{d\varphi}{d\sigma} = 2Du \times Du^2\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + Du^2 \times Du^2\frac{d^2u}{d\varphi^2} = D^2u^3\left[2\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right] \tag{1.81}$$

が得られるので，(1.80) 及び (1.81) を (1.78) に代入すると，

$$\frac{d^2r}{d\sigma^2} = \frac{2}{u^3}\left(\frac{du}{d\sigma}\right)^2 - \frac{1}{u^2}\frac{d^2u}{d\sigma^2} \tag{1.82}$$

$$= \frac{2}{u^3}\left(Du^2\frac{du}{d\varphi}\right)^2 - \frac{1}{u^2}\times D^2u^3\left[2\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right] \tag{1.83}$$

$$= 2D^2u\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 - 2D^2u\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 - D^2u^2\frac{d^2u}{d\varphi^2} \tag{1.84}$$

$$= -D^2u^2\frac{d^2u}{d\varphi^2}, \tag{1.85}$$

よって，

$$\frac{d^2r}{d\sigma^2} = -D^2u^2\frac{d^2u}{d\varphi^2}, \tag{1.86}$$

が得られたので，これを，(1.72) 式,

$$-\frac{d^2r}{d\sigma^2} + \frac{D^2}{r^3} = \frac{3}{2}\frac{D^2r_g}{r^4}, \tag{1.87}$$

に代入すると，

$$D^2u^2\frac{d^2u}{d\varphi^2} + D^2u^3 = \frac{3}{2}D^2r_gu^4, \tag{1.88}$$

即ち，

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{3}{2}r_gu^2, \tag{1.89}$$

が得られる．これが太陽表面付近を通過する星の光の軌跡が満たすべき微分方程式である．

さて求める微分方程式が得られたところで，大雑把に解の挙動を考えてみよう．(1.89) 式でまず目に付くのは右辺の

$$\frac{3}{2}r_gu^2 = \frac{3}{2}\frac{r_g}{r^2} \tag{1.90}$$

の部分である．いま r_g は星の光の軌跡が通過する太陽表面と比較して，100,000 倍のオーダーで小さいのであった．従って一番荒い近似としては右辺を 0 にとることが出来る．これは，

$$r_g = \frac{2GM_\odot}{c^2}, \tag{1.91}$$

より太陽の質量が 0，即ち，空間の歪みが全く無いミンコフスキー時空になっていると仮定したのと同じである．このとき微分方程式 (1.89) は，

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 0, \tag{1.92}$$

なので解は，

$$u(\varphi) = A\sin\varphi + B\cos\varphi \tag{1.93}$$

の形をしている．ここでこの解は距離 r の逆数だから，明らかに A, B は実数でなくてはならない．するとこのとき，

$$u(\varphi) = A\sin\varphi + B\cos\varphi = \sqrt{A^2+B^2}\left(\sin\varphi\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} - \cos\varphi\frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right) = \sqrt{A^2+B^2}\sin(\varphi-\alpha), \tag{1.94}$$

但し，

$$\sin\alpha = -\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}, \tag{1.95}$$

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{1.96}$$

と置いた．ここでいま太陽にもっとも近づいたときの光線と太陽の距離を l とすれば，

$$l \leq r(\varphi) \tag{1.97}$$

が任意の r で成り立つから，

$$\frac{1}{l} \geq \frac{1}{r} = u(\varphi), \tag{1.98}$$

で等号成立は最小の r のときだから，

$$\frac{1}{l} = u(\varphi) = \sqrt{A^2+B^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{A^2+B^2}, \tag{1.99}$$

より，(1.89) の右辺を 0 と置いたときの最終的な解の形は，

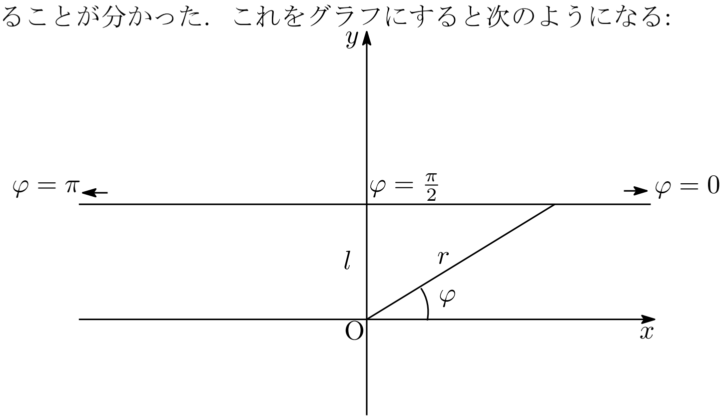
$$u(\varphi) = \frac{\sin(\varphi-\alpha)}{l}, \tag{1.100}$$

となり，予想通り (1.74) が再現されていることが確認できる．

ここで，この直線解が x 軸に平行になるようにとるためには，角度 α をちょうど 0 にとればよい．以上より，この条件下での近似解は，

$$u(\varphi) = \frac{\sin\varphi}{l}, \tag{1.101}$$

となることが分かった．これをグラフにすると次のようになる:



さて，この解は全く光線が屈折しない役に立たない近似解なのであるが，求めたい近似解は，太陽表面付近で非常に弱い重力であることを考えると，

$$u(\varphi) = \frac{\sin\varphi}{l} + \chi(\varphi), \tag{1.102}$$

という風に摂動項が加わる形であるとして，ほぼ問題ない．そこでこれを微分方程式 (1.89) に代入して，χ を求めよう．

まず，

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{\cos\varphi}{l} + \frac{d\chi}{d\varphi}, \tag{1.103}$$

だから，

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = -\frac{\sin\varphi}{l} + \frac{d^2\chi}{d\varphi^2} \tag{1.104}$$

となるので，これを微分方程式 (1.89) に代入すると，左辺は，

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{\sin\varphi}{l} + \frac{d^2\chi}{d\varphi^2} + \frac{\sin\varphi}{l} + \chi = \frac{d^2\chi}{d\varphi^2} + \chi \tag{1.105}$$

となる．一方，右辺は，

$$\frac{3}{2}r_g u^2 = \frac{3}{2}r_g\left(\frac{\sin\varphi}{l} + \chi\right)^2 = \frac{3}{2}r_g\left(\frac{\sin^2\varphi}{l^2} + 2\frac{\sin\varphi}{l}\chi + \chi^2\right) \tag{1.106}$$

となるが，いま摂動項 $\chi(\varphi)$ は充分小さいことが予想されるから，上の式において，$\dfrac{\sin^2\varphi}{l^2}$ 以下の項全ては無視しよう．すると，右辺と左辺をあわせると，

$$\frac{d^2\chi}{d\varphi^2}+\chi=\frac{3}{2}r_g\frac{\sin^2\varphi}{l^2}=\frac{3r_g}{2l^2}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}=\frac{3r_g}{4l^2}(1-\cos 2\varphi) \tag{1.107}$$

を得る．この微分方程式は解ける．実際，右辺の形から $\dfrac{3r_g}{4l^2}$ という項が必要だが，χ を 2 回微分するとこの項は消えてしまうので，χ は，

$$\chi=\frac{3r_g}{4l^2}+C\cos 2\varphi, \tag{1.108}$$

の形をしていることになる，そこでこれを再び (1.107) に代入してやると，

$$\frac{3r_g}{4l^2}(1-\cos 2\varphi)=\frac{3r_g}{2l^2}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}=-4C\cos 2\varphi+\frac{3r_g}{4l^2}+C\cos 2\varphi=\frac{3r_g}{4l^2}-3C\cos 2\varphi, \tag{1.109}$$

これより，$C=\dfrac{r_g}{4l}$ が得られるので，

$$\chi=\frac{3r_g}{4l^2}+\frac{r_g}{4l^2}\cos 2\varphi, \tag{1.110}$$

が得られる．これを少し変形すると，

$$\chi=\frac{3r_g}{4l^2}\left(1+\frac{1}{3}\cos 2\varphi\right)=\frac{3r_g}{4l^2}\left[1+\frac{1}{3}(1-2\sin^2\varphi)\right]=\frac{r_g}{4l^2}\left(3+1-2\sin^2\varphi\right)=\frac{r_g}{2l^2}\left(2-\sin^2\varphi\right), \tag{1.111}$$

となるので重力が弱いときの光線の軌跡の方程式は,

$$u(\varphi)=\frac{1}{l}\sin\varphi+\frac{r_g}{l^2}-\frac{r_g}{2l^2}\sin^2\varphi, \tag{1.112}$$

となることが分かった．どのくらい光線の軌跡がずれるかは，単純に $r\to\infty$，即ち，$u=0$ ととればよいから，

$$\frac{1}{l}\sin\varphi+\frac{r_g}{l^2}-\frac{r_g}{2l^2}\sin^2\varphi=0, \tag{1.113}$$

これは $\sin\varphi$ に関する二次式だから簡単に解ける．上の式を少し変形すると，

$$\sin^2\varphi-2\frac{l}{r_g}\sin\varphi-2=0, \tag{1.114}$$

より解の公式を用いれば，

$$\sin\varphi=\frac{l}{r_g}\pm\sqrt{\left(\frac{l}{r_g}\right)^2+2}, \tag{1.115}$$

が得られる．ここで，$l\gg r_g$ より，$\sin\varphi$ の絶対値が 1 を超えるプラスの解は適当ではない．従って，最終的な摂動解は,

$$\sin\varphi=\frac{l}{r_g}-\sqrt{\left(\frac{l}{r_g}\right)^2+2}, \tag{1.116}$$

となる．ここでさらに近似を適用しよう．上の式の左辺は φ が充分小さいとき，

$$\sin\varphi\simeq\varphi, \tag{1.117}$$

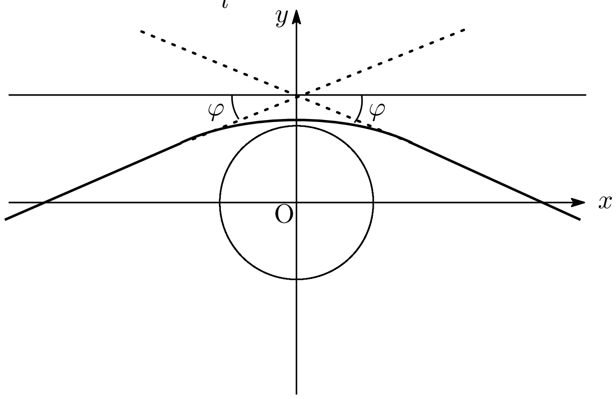
となる．一方，右辺は，マクローリン展開を用いると，

$$\frac{l}{r_g}-\sqrt{\left(\frac{l}{r_g}\right)^2+2}=\frac{l}{r_g}-\frac{l}{r_g}\sqrt{1+2\frac{{r_g}^2}{l^2}}=\frac{l}{r_g}-\frac{l}{r_g}\left(1+\frac{{r_g}^2}{l^2}+\cdots\right)\simeq\frac{l}{r_g}-\frac{l}{r_g}\left(1+\frac{{r_g}^2}{l^2}\right)=-\frac{r_g}{l} \tag{1.118}$$

と近似できるので，結局,

$$\varphi\simeq-\frac{r_g}{l} \tag{1.119}$$

が成り立つことが分かった．ここで，光線の軌跡は，y 軸対称に選んだのだったから，下の図のように y 軸の左側と右側で合計 $2 \times \frac{r_g}{l}$ ラジアン屈折することになる:



従って最終的な太陽表面付近を通過する星の光の屈折の式は,

$$r_g = \frac{2GM_{\odot}}{c^2}, \tag{1.120}$$

だったから，l として太陽半径 $R_{\odot}$ を選んでやれば,

$$\frac{2r_g}{l} = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}}(rad) \tag{1.121}$$

が得られた．これが太陽表面付近を通過する星の光の屈折を表す式である．

実際に値を代入してみると,

$$G = 6.67384 \times 10^{-11} m^3 s^{-2} kg^{-1}, \tag{1.122}$$

$$c = 2.99792458 \times 10^8 ms^{-1}, \tag{1.123}$$

$$R_{\odot} = 6.96 \times 10^8 m, \tag{1.124}$$

$$M_{\odot} = 1.981 \times 10^{30} kg, \tag{1.125}$$

より,

$$\frac{2r_g}{l} = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} \simeq 8.45 \times 10^{-6}(rad) \simeq 8.45 \times 10^{-6} \times \frac{180}{\pi}(\text{度}) = 8.45 \times 10^{-6} \times \frac{180}{\pi} \times 3600(\text{秒}) \simeq 1.74(\text{秒}) \tag{1.126}$$

となり，誤差はあるものの約 1.75 秒角程度の屈折をすることが示された．