測地線の方程式の導出 (証明 4)

ここでは，解析力学における変分原理として知られる手法を利用して測地線の方程式を導く．

ここでの証明の考え方

自由粒子はミンコフスキー空間上で直線となる経路をとり, それは時空上の 2 点 A，B を結ぶ固有時最大の経路をとる．それに対応し, 一般の曲がった空間においてもあらゆる経路のなかからその固有時が最大となるものが自由粒子の移動経路となり，それは経路の積分の最小作用で与えられる．

時間的な世界線に対する測地線の方程式を導く

時間的とは,

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = g_\mu dx^\mu dx^\nu < 0 \tag{1}$$

である事をいう．ここでは時間的な世界線，即ち物体が運動可能な世界線の場合の測地線の方程式を求める．時間的な世界線に対しては，点 A から点 B までの固有時が最大となる経路が測地線となるから，次の変分を求めればよい．

$$\delta \int_A^B d\tau = \delta \int_A^B \frac{d\tau}{d\lambda} d\lambda = \delta \int_A^B L d\lambda = 0 \tag{2}$$

ここで，A，B とは質点の運動の如何によらずに固定された時空上の点であることに注意しよう．(1) より

$$c\frac{d\tau}{d\lambda} = \sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} = cL \tag{3}$$

である (ただし，$\dot{x}^\mu \overset{\text{def}}{=} \dfrac{dx^\mu}{d\lambda}$ と置いた.).

一般に (2) 式を変分すると次のオイラー・ラグランジュの方程式が得られる．

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\omega}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\omega} = 0 \tag{4}$$

従って L をこの (4) 式を代入する事により，求める測地線の方程式が得られることが期待される．ここで,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\omega} = \frac{-g_{\omega\alpha}\dot{x}^\alpha - g_{\alpha\omega}\dot{x}^\alpha}{2c\sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}} = -\frac{g_{\omega\alpha}\dot{x}^\alpha}{c\sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}} = -\frac{g_{\omega\alpha}}{c\sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}}\frac{dx^\alpha}{d\lambda} = -\frac{g_{\omega\alpha}}{c\sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{d\tau}{d\lambda} = -\frac{g_{\omega\alpha}}{c^2}\frac{dx^\alpha}{d\tau}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^\omega} = -\frac{g_{\beta\gamma,\,\omega}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma}{2c\sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}} = -\frac{g_{\beta\gamma,\,\omega}}{2c\sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}}\frac{dx^\beta}{d\lambda}\frac{dx^\gamma}{d\lambda} = -\frac{g_{\beta\gamma,\,\omega}}{2c\sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{d\tau}{d\lambda}\frac{dx^\gamma}{d\tau}\frac{d\tau}{d\lambda} = -\frac{g_{\beta\gamma,\,\omega}\sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}}{2c^3}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau}$$

だから，これを (4) 式に代入すると,

$$\frac{d}{d\lambda}\left(-\frac{g_{\omega\alpha}}{c^2}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\right) + \frac{g_{\beta\gamma,\,\omega}\sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}}{2c^3}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0 \tag{5}$$

(5) 式に $-\dfrac{c^3}{\sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}}$ を掛けると,

$$\frac{c}{\sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}}\frac{d}{d\lambda}\left(g_{\omega\alpha}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\right) - \frac{1}{2}g_{\beta\gamma,\,\omega}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0$$

$$\therefore \frac{c}{\sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}}\frac{d\tau}{d\lambda}\frac{d}{d\tau}\left(g_{\omega\alpha}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\right) - \frac{1}{2}g_{\beta\gamma,\,\omega}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0$$

よってこれより,

$$\frac{d}{d\tau}\left(g_{\omega\alpha}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\right)-\frac{1}{2}g_{\beta\gamma,\,\omega}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau}=0$$

この式の微分をさらに続けると,

$$g_{\omega\alpha,\,\beta}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\alpha}{d\tau}+g_{\omega\alpha}\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}-\frac{1}{2}g_{\beta\gamma,\,\omega}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau}=0 \tag{6}$$

ここで少しテクニックを使う．今現れる添字において，和を取っているところは自由に添字を選んでよいから第1項目に対して次の変形が行える．

$$g_{\omega\alpha,\,\beta}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\alpha}{d\tau}=\frac{1}{2}g_{\omega\beta,\,\gamma}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau}+\frac{1}{2}g_{\omega\gamma,\,\beta}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau} \tag{7}$$

これを (6) 式に代入してまとめると,

$$g_{\omega\alpha}\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}+\frac{1}{2}\left(g_{\omega\beta,\,\gamma}+g_{\omega\gamma,\,\beta}-g_{\beta\gamma,\,\omega}\right)\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau}=0 \tag{8}$$

この式の両辺に $g^{\alpha\omega}$ を掛けて縮約を取ると,

$$g^{\alpha\omega}g_{\omega\alpha}\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}+\frac{1}{2}g^{\alpha\omega}\left(g_{\omega\beta,\,\gamma}+g_{\omega\gamma,\,\beta}-g_{\beta\gamma,\,\omega}\right)\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau}=0$$

よって,

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau}=0 \tag{9}$$

が得られた．この式は時間的な世界線に対する解なので時間的な測地線の方程式と呼ぶ．なお空間的な場合及び光的な場合は，ラグランジアン L が虚数になったり，0 になったりするのでこの解には用いる事が出来ない．

空間的，或いは光的な世界線に対する測地線の方程式はどうすればよいか？

実は上の議論は $d\tau$ を不変間隔 ds に置き換えるだけで空間的な測地線の方程式を導くのに使えます．その場合，4 次元時空上の 2 点 A，B に対し，次の積分が停留値となる条件から得られる．

$$\int_A^B d\tau \Longrightarrow \int_A^B ds=\int_A^B\frac{ds}{d\lambda}d\lambda$$

従って，次の変分を求めればよい．

$$\delta\int_A^B d\tau=0 \Longrightarrow \delta\int_A^B ds=\delta\int_A^B\frac{ds}{d\lambda}d\lambda=0$$

ここで，(1) 式より,

$$\frac{ds}{d\lambda}=\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}=cL \tag{10}$$

が得られるので，負号の有る無しの違いはありますが殆ど同じ議論によって，(9) 式の τ を s に置き換えた形の測地線の方程式が得られます．即ち，空間的な測地線の式は,

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds}=0 \tag{11}$$

となることになります．

さて残るは光的，即ち $ds=0$(よって $d\tau$ も 0) の場合の測地線ですが，ここで考えたような方法での変分としては簡単には得られないようです．というのも一般相対論で自由粒子に対する座標変換で不変な量は不変間隔 ds か固有時 $d\tau$ ぐらいしかありません．従って光的な場合，それらがどちらも 0 となってしまい上手くいかないのです．実は前回ご紹介した，ラグランジアン L として $L=g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\frac{dx^\beta}{d\sigma}$ と取ったものは，そのような全てのケースを包括するような一般化だと思われます．従って今回のこの証明は個人的にはおまけのようなものです（笑．