測地線の方程式の導出 (証明 3)

ここでは，解析力学における変分原理として知られる手法を利用して測地線の方程式を導く．

ここでの証明の考え方

解析力学において，ポテンシャル U による外力以外が働かない質点のラグランジアン L は運動量 T からポテンシャル U を引いたもの，即ち，$L = T - U$ によって定義され，質点の運動の経路はラグランジアン L の時間による積分が停留値，即ち，

$$\delta \int_A^B L dt = 0$$

になるように移動することが知られている．ここではニュートン力学における万有引力を含む任意の力が働かない，完全な自由粒子の運動に対する変分原理から一般相対論における，重力のみが働いている自由粒子の運動に対する変分原理への拡張により測地線の方程式を導く．

曲がった空間の自由粒子に対する変分に拡張する

ニュートン力学における重力を含む一切の外力が働かない自由粒子の運動に対するラグランジアン L は，ポテンシャル U が存在しないので $L = T$ となる．即ち，満たすべき変分は，

$$\delta \int_A^B L dt = \delta \int_A^B T dt = \delta \int_A^B \frac{1}{2} m v^2 dt = \frac{1}{2} m \delta \int_A^B v^2 dt = 0$$

となる．容易に分かるように，この変分から速度 $v = const.$ が得られるので外力が働かないときの粒子の軌道が確かに得られる．上の式変形によりラグランジアンは通常は $L = T - U$ で定義されるが，この自由粒子の運動を考える場合は $L = v^2$ としても，本質的に同一の変分であるためこのような置き換えを行っても問題が無い事が分かる．

さて，この自由粒子が重力場のなかを自由落下するとき，どのような軌道を取るか考えてみよう．今，この質点に働く力は重力ポテンシャルのみである．ここで注意すべきは，一般相対性理論において，重力のポテンシャルは，等価原理により空間の歪みに他ならない．従ってこの質点があたかも重力ポテンシャルを受けて運動するように見えたとしても，実際は曲がった空間内を一切の力を受けずに移動していると考えるべきである．そのように考えるなら，この自由粒子は作用積分が最小になるような経路をとるという意味で，先に説明したニュートン力学における自由粒子に対する変分をそのまま拡張すればよいことが分かる．それゆえ次の置き換えを行う事が出来る：

$$dt \Longrightarrow d\sigma,$$
$$v^2 = \delta_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = \frac{\delta_{ij} dx^i dx^j}{dt^2} = \left(\frac{d\ell}{dt} \right)^2 \Longrightarrow \left(\frac{ds}{d\sigma} \right)^2 = \frac{g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta}{d\sigma^2} = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\beta}{d\sigma} \overset{\text{def}}{=} L$$

これより, 求める変分は次の形になる:

$$\delta \int_A^B L d\sigma = \delta \int_A^B g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\beta}{d\sigma} d\sigma = 0 \tag{1}$$

以降，慣習どおり" $\dot{}$ "で $\dfrac{d}{d\sigma}$ を表す事にすると，(1) 式左辺から解析力学におけるオイラー・ラグランジュ方程式,

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \tag{2}$$

が得られるので，(2) 式に L として先ほどの式を直接代入すれば,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{d\sigma}\left(g_{\alpha\beta}\frac{\partial \dot{x}^\alpha}{\partial \dot{x}^\mu}\dot{x}^\beta + g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\frac{\partial \dot{x}^\beta}{\partial \dot{x}^\mu}\right) - g_{\alpha\beta,\,\mu}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = 0 \\
\therefore\quad &\frac{d}{d\sigma}\left(g_{\mu\beta}\dot{x}^\beta + g_{\alpha\mu}\dot{x}^\alpha\right) - g_{\alpha\beta,\,\mu}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = 0 \\
\therefore\quad &g_{\mu\beta}\ddot{x}^\beta + g_{\mu\beta,\,\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial\sigma}\dot{x}^\beta + g_{\alpha\mu}\ddot{x}^\alpha + g_{\alpha\mu,\,\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial\sigma}\dot{x}^\alpha - g_{\alpha\beta,\,\mu}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = 0 \\
\therefore\quad &g_{\mu\alpha}\ddot{x}^\alpha + g_{\mu\beta,\,\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial\sigma}\dot{x}^\beta + g_{\alpha\mu}\ddot{x}^\alpha + g_{\alpha\mu,\,\beta}\frac{\partial x^\beta}{\partial\sigma}\dot{x}^\alpha - g_{\alpha\beta,\,\mu}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = 0 \\
\therefore\quad &g_{\mu\alpha}\ddot{x}^\alpha + g_{\mu\beta,\,\alpha}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta + g_{\mu\alpha}\ddot{x}^\alpha + g_{\alpha\mu,\,\beta}\dot{x}^\beta\dot{x}^\alpha - g_{\alpha\beta,\,\mu}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = 0 \\
\therefore\quad &2g_{\mu\alpha}\ddot{x}^\alpha + g_{\mu\beta,\,\gamma}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma + g_{\mu\gamma,\,\beta}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma - g_{\gamma\beta,\,\mu}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma = 0 \\
\therefore\quad &g^{\alpha\mu}g_{\mu\alpha}\ddot{x}^\alpha + \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}\left(g_{\mu\beta,\,\gamma} + g_{\mu\gamma,\,\beta} - g_{\gamma\beta,\,\mu}\right)\dot{x}^\gamma\dot{x}^\beta = 0 \\
\therefore\quad &\ddot{x}^\alpha + \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}\left(g_{\mu\beta,\,\gamma} + g_{\mu\gamma,\,\beta} - g_{\gamma\beta,\,\mu}\right)\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma = 0 \\
\therefore\quad &\ddot{x}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma = 0
\end{aligned}
$$

従ってこれより,

$$
\frac{d^2x^\alpha}{d\sigma^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\sigma}\frac{dx^\gamma}{d\sigma} = 0 \tag{3}
$$

となり，確かに測地線の式が求められた.