測地線の方程式の導出 (証明 2)

測地線の方程式の証明はいくつか知られている．ここではそのような証明の一つ (別証明その 1 とする) を紹介する．

ここでの証明の考え方

ここでは，局所慣性系における自由粒子の軌道 (当然、等速直線運動をする) を一般の座標から見たらどうなるのか？ と言う観点から測地線の方程式を導く．

世界線

重力以外の力を受けずに運動する粒子は自由粒子と呼ばれ，その軌跡は 4 次元時空上で 1 本の曲線となる．この曲線を世界線と呼ぶ．曲線は一般に一つのパラメータによって表されるので，以後，自由粒子の，ある座標系での位置を x^μ としたとき，σ をパラメータとして，$x^\mu = x^\mu(\sigma)$ と表されているものとする．パラメータ σ として固有時 τ を取れば $x^\mu(\tau)$ は時刻 τ における位置を表しイメージしやすいが，必ずしも σ として固有時 τ を選ばなければならないわけではない．

測地線の方程式の導出

ある自由粒子の運動を考える．この自由粒子のある瞬間の位置を P_0 としたとき，この質点が無重力状態に置かれているように見える座標を任意に選べば局所的に慣性系に出来る．従って特にこの時空上の点の近傍で計量が局所ローレンツ系として局所的にミンコフスキー空間の計量となっているとしてよい．そこで今考えている局所的にミンコフスキー空間となる座標系を $X^\mu = X^\mu(\sigma)$ とすると，質点は等速直線運動をするから，

$$\frac{d^2X^\mu}{d\sigma^2} = 0 \tag{1}$$

をみたす．ここで，この質点を任意の一般座標 x^μ からみたものとしてこの式を変換して得られたものが，我々が求めるべき測地線の方程式である．今，$x^\mu \to X^\mu$ の変換が $X^\mu = f^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3) = f^\mu(x^\nu)$ で表されているものとしよう．すると，全微分の式より，

$$dX^\mu = \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\nu}dx^\nu = \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu}dx^\nu$$

より，

$$\frac{dX^\mu}{d\sigma} = \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{d\sigma} \tag{2}$$

が成り立つ．そこで (1) 式に (2) 式を代入すると，

$$\frac{d^2X^\mu}{d\sigma^2} = \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{dX^\mu}{d\sigma}\right) = \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{d\sigma}\right) = \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\sigma^2} + \frac{\partial^2 X^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}\frac{dx^\lambda}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0 \tag{3}$$

が得られる．そこで (3) 式に $\dfrac{\partial x^\rho}{\partial X^\mu}$ を掛けて縮約を取ると，

$$\frac{\partial x^\rho}{\partial X^\mu}\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\sigma^2} + \frac{\partial x^\rho}{\partial X^\mu}\frac{\partial^2 X^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}\frac{dx^\lambda}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x^\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\sigma^2} + \frac{\partial x^\rho}{\partial X^\mu}\frac{\partial^2 X^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}\frac{dx^\lambda}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0$$

よって，

$$\frac{d^2x^\rho}{d\sigma^2} + \frac{\partial x^\rho}{\partial X^\mu}\frac{\partial^2 X^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}\frac{dx^\lambda}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0 \tag{4}$$

ここで $g_{\mu\nu}$，$\eta_{\mu\nu}$ は 2 階の共変テンソル，$g^{\mu\nu}$，$\eta^{\mu\nu}$ は 2 階の反変テンソルである事より，

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu}\eta_{\alpha\beta},\ g^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial X^\beta}\eta^{\alpha\beta},$$

が成り立つので，接続係数の定義

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\omega} \left(\frac{\partial g_{\omega\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\omega\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^{\omega}} \right)$$

より,

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} &= \frac{1}{2} g^{\rho\omega} \left(\frac{\partial g_{\omega\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\omega\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\omega}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial X^{\kappa}} \frac{\partial x^{\omega}}{\partial X^{\tau}} \eta^{\kappa\tau} \left(\cancel{\frac{\partial^2 X^{\alpha}}{\partial x^{\omega} \partial x^{\lambda}} \frac{\partial X^{\beta}}{\partial x^{\nu}}} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial X^{\alpha}}{\partial x^{\omega}} \frac{\partial^2 X^{\beta}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 X^{\alpha}}{\partial x^{\omega} \partial x^{\nu}} \frac{\partial X^{\beta}}{\partial x^{\lambda}} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial X^{\alpha}}{\partial x^{\omega}} \frac{\partial^2 X^{\beta}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} \eta_{\alpha\beta} \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \cancel{\frac{\partial^2 X^{\alpha}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\omega}} \frac{\partial X^{\beta}}{\partial x^{\nu}}} \eta_{\alpha\beta} - \frac{\partial X^{\alpha}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial^2 X^{\beta}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\omega}} \eta_{\alpha\beta} \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial X^{\kappa}} \frac{\partial x^{\omega}}{\partial X^{\tau}} \eta^{\kappa\tau} \left(2 \frac{\partial X^{\alpha}}{\partial x^{\omega}} \frac{\partial^2 X^{\beta}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 X^{\alpha}}{\partial x^{\omega} \partial x^{\nu}} \frac{\partial X^{\beta}}{\partial x^{\lambda}} \eta_{\alpha\beta} - \frac{\partial X^{\alpha}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial^2 X^{\beta}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\omega}} \eta_{\alpha\beta} \right) \\
&= \frac{\partial x^{\omega}}{\partial X^{\tau}} \frac{\partial X^{\alpha}}{\partial x^{\omega}} \eta^{\kappa\tau} \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial X^{\kappa}} \frac{\partial^2 X^{\beta}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} + \frac{1}{2} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial X^{\kappa}} \frac{\partial x^{\omega}}{\partial X^{\tau}} \eta^{\kappa\tau} \frac{\partial^2 X^{\alpha}}{\partial x^{\omega} \partial x^{\nu}} \frac{\partial X^{\beta}}{\partial x^{\lambda}} \eta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial X^{\kappa}} \frac{\partial x^{\omega}}{\partial X^{\tau}} \eta^{\kappa\tau} \frac{\partial X^{\alpha}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial^2 X^{\beta}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\omega}} \eta_{\alpha\beta} \\
&= \frac{\partial X^{\alpha}}{\partial X^{\tau}} \eta^{\kappa\tau} \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial X^{\kappa}} \frac{\partial^2 X^{\beta}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} + \frac{1}{2} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial X^{\kappa}} \frac{\partial x^{\omega}}{\partial X^{\tau}} \eta^{\kappa\tau} \frac{\partial^2 X^{\alpha}}{\partial x^{\omega} \partial x^{\nu}} \frac{\partial X^{\beta}}{\partial x^{\lambda}} \eta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial X^{\kappa}} \frac{\partial x^{\omega}}{\partial X^{\tau}} \eta^{\kappa\tau} \frac{\partial X^{\beta}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial^2 X^{\alpha}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\omega}} \eta_{\beta\alpha} \\
&= \delta^{\alpha}_{\tau} \eta^{\kappa\tau} \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial X^{\kappa}} \frac{\partial^2 X^{\beta}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} \\
&= \eta^{\kappa\alpha} \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial X^{\kappa}} \frac{\partial^2 X^{\beta}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} \\
&= \delta^{\kappa}_{\beta} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial X^{\kappa}} \frac{\partial^2 X^{\beta}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} \\
&= \frac{\partial x^{\rho}}{\partial X^{\beta}} \frac{\partial^2 X^{\beta}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}}
\end{aligned}$$

であるから,これを (4) 式に代入すると,

$$\frac{d^2 x^{\rho}}{d\sigma^2} + \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} \frac{dx^{\lambda}}{d\sigma} \frac{dx^{\nu}}{d\sigma} = 0 \tag{5}$$

が得られる.これは一般の座標系から見た質点の運動方程式を表しており測地線の方程式に他ならない.