測地線の方程式の導出 (証明 1)

ここでは，測地線の方程式と呼ばれる，曲がった空間における最短コース，すなわちその空間における 2 点間を結ぶ直線のようなものを与える式を導く.

測地線を定義するには

ある曲線が測地線となっているとき，その曲線の接ベクトルはその曲線上のどの点でも等しくなっている．言い換えれば，ある曲線が測地線であるとは，その曲線の接ベクトルをその曲線上の任意の点に平行移動させると，そこでの接ベクトルに等しくなっているということである．この条件から測地線の方程式を導こう.

測地線の導出

任意の方向への平行移動は微小の平行移動の反復によって得られる．そこで測地線に対する接ベクトルを，

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\sigma}$$

としよう．このとき，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\sigma)$，$\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\sigma + d\sigma)$ とおくと，曲線 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\sigma)$ の接ベクトル $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ において，$\mathrm{P} \to \mathrm{P}'$ の平行移動によってベクトルの向きや大きさが変化しないという条件は，

$$\boldsymbol{u}_\parallel(\mathrm{P} \to \mathrm{P}') = \boldsymbol{u}(\mathrm{P}')$$

すなわち，

$$\boldsymbol{u}(\mathrm{P}') - \boldsymbol{u}_\parallel(\mathrm{P} \to \mathrm{P}') = 0$$

と表される．いま，

$$\boldsymbol{u}(\mathrm{P}') = u^\mu(\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x})$$

であるから，$\boldsymbol{u}_\parallel(\mathrm{P} \to \mathrm{P}')$ を点 P' での基底 $\boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x})$ で展開したときの係数を $u^\mu_\parallel(x; d\boldsymbol{x})$ としよう．すなわち，

$$u^\mu_\parallel(x; d\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_\mu(x + d\boldsymbol{x}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \boldsymbol{u}_\parallel(\mathrm{P} \to \mathrm{P}')$$

としよう，すると $\boldsymbol{u}_\parallel(\mathrm{P} \to \mathrm{P}')$ は，$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}$ へ平行移動すると，ベクトルの平行移動に関する前節での結果より，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_\parallel(\mathrm{P} \to \mathrm{P}') &= \boldsymbol{u}_\parallel(\boldsymbol{x}; d\boldsymbol{x}) \\
&= u^\mu_\parallel(x; d\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}) \\
&= \left(u^\mu(\boldsymbol{x}) - \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\nu}(\boldsymbol{x})u^\alpha(\boldsymbol{x})dx^\nu\right)\boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}) \\
&= \left(u^\mu(\boldsymbol{x}) - \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\nu}(\boldsymbol{x})u^\alpha(\boldsymbol{x})u^\nu(\boldsymbol{x})d\sigma\right)\boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

となるから，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}(\mathrm{P}') - \boldsymbol{u}_{\parallel}(\mathrm{P}\to\mathrm{P}') &= u^\mu(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) - u^\mu_{\parallel}(x;d\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) \\
&= u^\mu(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) - \left(u^\mu(\boldsymbol{x}) - \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\nu}(\boldsymbol{x})u^\alpha(\boldsymbol{x})u^\nu(\boldsymbol{x})d\sigma\right)\boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) \\
&= \left(u^\mu(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) - u^\mu(\boldsymbol{x}) + \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\nu}(\boldsymbol{x})u^\alpha(\boldsymbol{x})u^\nu(\boldsymbol{x})d\sigma\right)\boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) \\
&= d\sigma\left(\frac{u^\mu(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) - u^\nu(\boldsymbol{x})}{d\sigma} + \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\nu}(\boldsymbol{x})u^\alpha(\boldsymbol{x})u^\nu(\boldsymbol{x})\right)\boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) \\
&= d\sigma\left(\frac{u^\mu(\boldsymbol{x}(\sigma+d\sigma)) - u^\mu(\boldsymbol{x}(\sigma))}{d\sigma} + \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\nu}(\boldsymbol{x})u^\alpha(\boldsymbol{x})u^\nu(\boldsymbol{x})\right)\boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) \\
&= d\sigma\left(\frac{du^\mu}{d\sigma} + \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\nu}u^\alpha u^\nu\right)\boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) \\
&= d\sigma\left(\frac{du^\mu}{d\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{d\sigma} + \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\nu}u^\alpha u^\nu\right)\boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) \\
&= d\sigma\left(\frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu}u^\nu + \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\nu}u^\alpha u^\nu\right)\boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) \qquad \text{(i)} \\
&= d\sigma\left(u^\mu{}_{,\nu}u^\nu + \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\nu}u^\alpha u^\nu\right)\boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) \\
&= d\sigma u^\nu\left(u^\mu{}_{,\nu} + \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\nu}u^\alpha\right)\boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) \\
&= d\sigma u^\nu u^\mu{}_{;\nu}\boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) \qquad \text{(ii)} \\
&= 0^\mu\cdot\boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) \qquad \text{(iii)}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ただし，0^μ は 0 ベクトルとする．そこで (ii),(iii) を $d\sigma$ で割ってやると，

$$
u^\nu u^\mu{}_{;\nu}\boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) = 0^\mu\cdot\boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})
$$

が成り立つので，

$$
u^\nu u^\mu{}_{;\nu} = 0 \tag{1}
$$

が得られる．これを測地線の方程式と呼ぶ．叉，

$$
\frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu}u^\nu = \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{d\sigma} = \frac{du^\mu}{d\sigma} = \frac{d^2x^\mu}{d\sigma^2}
$$

を用いると，(i) より，(1) 式は

$$
\frac{d^2x^\mu}{d\sigma^2} + \Gamma^\mu{}_{\nu\varepsilon}\frac{dx^\nu}{d\sigma}\frac{dx^\varepsilon}{d\sigma} = 0 \tag{2}
$$

と表す事が出来ることも分かる．(2) 式は特に $\sigma=\tau$ とすれば，この座標において 4 元速度ベクトルが常に一定である事を示す式となる．