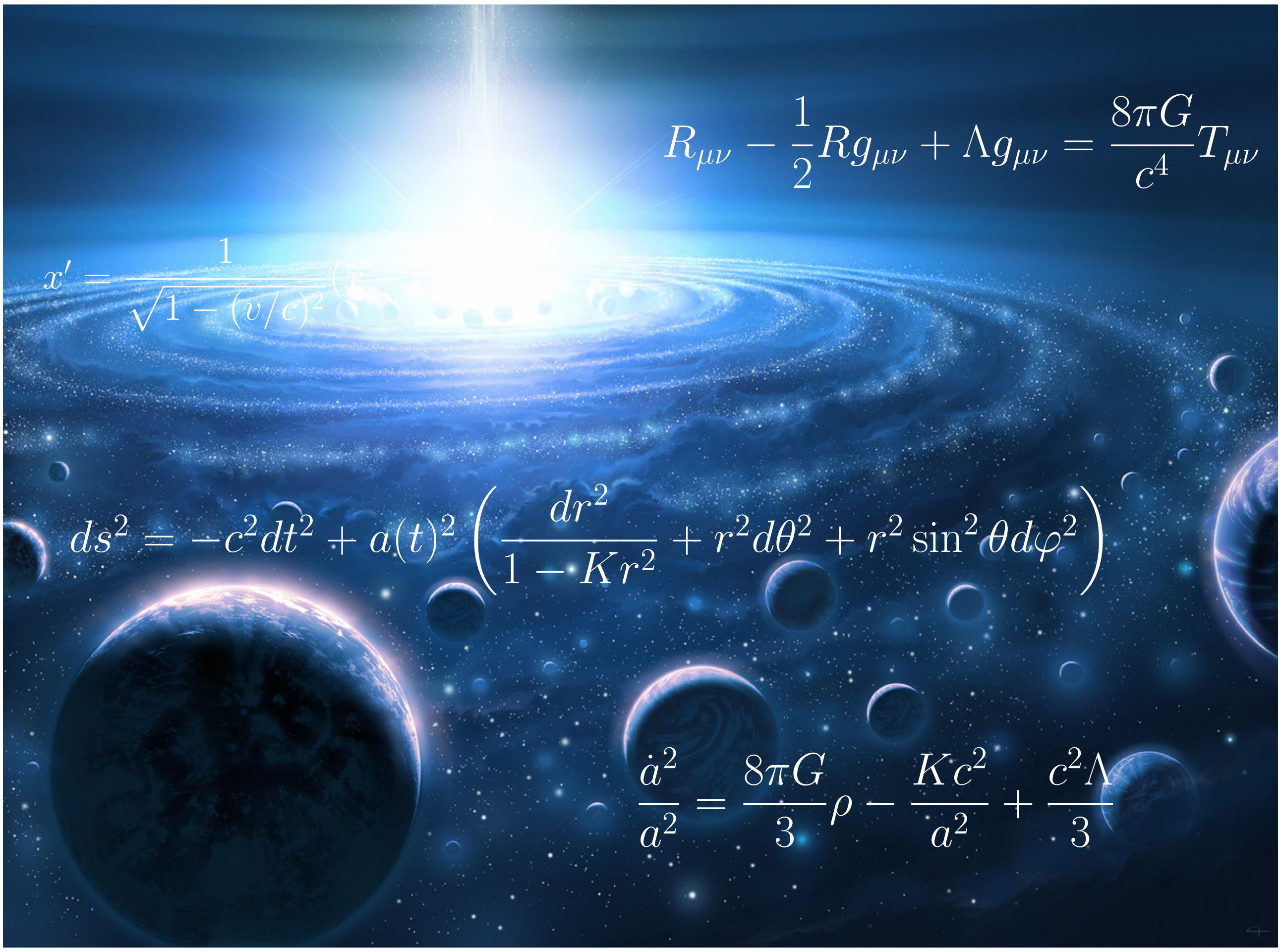
フリードマン方程式の紹介

平成 23 年 10 月 27 日



フリードマン方程式の導出

この項ではいよいよ膨張宇宙の解であるフリードマン方程式を導く．

条件を設定する

まず最初にこの方程式を導くまでの過程と仮定を記そう．(駄洒落スマン。。) 我々はまず，宇宙原理によって宇宙には中心は無い，(或いは全ての点が中心である) と仮定することにより，ロバートソン・ウォーカー計量を求めた．そしてこの計量についてアインシュタインテンソルまで求めた．これでアインシュタイン方程式の左辺が求まったことになる．次に我々がすべきことは，アインシュタイン方程式の右辺のエネルギー運動量テンソルを定めることである．ただし，エネルギー運動量テンソルとして，あまりに一般的なものをとると，方程式を解くのが難しくなったり，場合によったら不可能になってしまう．そこで我々はエネルギー運動量テンソルとして完全流体のものを使用することにする．宇宙には電荷もあるし常に完全流体ではないが，全体としてはほぼ中性的であると考えられるし，宇宙の大半を占めるのはほぼ真空の空間と低密度のガスなので，このかなり乱暴に見える近似もそれなりに有効であろうと考えるわけである．完全流体のエネルギー運動量テンソルは次の形だった:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p/c^2)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu} \tag{1}$$

ここで宇宙原理より，宇宙全体としては物質の流れがどこかに偏ったりとかはしていないと考えられるから，空間の膨張・収縮で静止していると考えられる各点（これを共動座標系と呼ぶ）に対して流体の流れを表す 3 次元速度 u_i は全て 0 であるとしてよい．このとき，$u_0 = c$ であるから，エネルギー運動量テンソルは,

$$\begin{aligned}
T_{00} &= (\rho + p/c^2)u_0 u_0 + p g_{00} = \rho c^2 + p - p = \rho c^2 \\
T_{ii} &= (\rho + p/c^2)u_i u_i + p g_{ii} = p g_{ii}
\end{aligned}$$

と表される．従って，アインシュタイン方程式は宇宙項を考慮すると,

$$\begin{aligned}
&(0,\ 0)\ \text{成分} : \text{左辺} = G_{00} + \Lambda g_{00} = \frac{3}{c^2}\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2}\right) + \Lambda g_{00} = \frac{3}{c^2}\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2}\right) - \Lambda \\
&(0,\ 0)\ \text{成分} : \text{右辺} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{00} = \frac{8\pi G}{c^2}\rho \\
&(i,\ i)\ \text{成分} : \text{左辺} = G_{ii} + \Lambda g_{ii} = -\frac{g_{ii}}{c^2}\left(\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{Kc^2}{a^2}\right) + \Lambda g_{ii} \\
&(i,\ i)\ \text{成分} : \text{右辺} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ii} = \frac{8\pi G}{c^4}p g_{ii}
\end{aligned}$$

以上より，独立な方程式は,

$$\frac{3}{c^2}\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2}\right) - \Lambda = \frac{8\pi G}{c^2}\rho \tag{2}$$

$$-\frac{1}{c^2}\left(\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{Kc^2}{a^2}\right) + \Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}p \tag{3}$$

になる．これを整理して，(2) 式は,

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{c^2\Lambda}{3} \tag{4}$$

になる．さらにこれを (3) 式に代入して,

$$
\begin{aligned}
&\frac{2\ddot{a}}{a}+\frac{\dot{a}^2}{a^2}+\frac{Kc^2}{a^2}-\Lambda c^2=-\frac{8\pi G}{c^2}p\\
\therefore\ &\frac{2\ddot{a}}{a}=-\frac{8\pi G}{c^2}p-\frac{Kc^2}{a^2}-\frac{\dot{a}^2}{a^2}+\Lambda c^2\\
&\quad=-\frac{8\pi G}{c^2}p-\cancelto{1}{\frac{Kc^2}{a^2}}-\left(\frac{8\pi G}{3}\rho-\cancelto{1}{\frac{Kc^2}{a^2}}+\frac{c^2\Lambda}{3}\right)+\Lambda c^2\\
&\quad=-\frac{8\pi G}{c^2}p-\frac{8\pi G}{3}\rho+\frac{2c^2\Lambda}{3}
\end{aligned}
$$

となるから，これを整理すると，

$$
\frac{\ddot{a}}{a}=-\frac{4\pi G}{3c^2}\left(\rho c^2+3p\right)+\frac{c^2\Lambda}{3} \tag{5}
$$

を得る．以上より，

$$
\frac{\dot{a}^2}{a^2}=\frac{8\pi G}{3}\rho-\frac{Kc^2}{a^2}+\frac{c^2\Lambda}{3} \tag{6}
$$

$$
\frac{\ddot{a}}{a}=-\frac{4\pi G}{3c^2}\left(\rho c^2+3p\right)+\frac{c^2\Lambda}{3} \tag{7}
$$

が得られた．(6) 式はフリードマン方程式 (Friedmann equation) と呼ばれる．

ここで，(7) 式において宇宙定数 Λ を 0 現実の宇宙に近い解としてどのようなものが想定できるか考えてみよう．宇宙は明らかに空間的広がりがあるから，そのスケールファクター $a(t)$ は明らかに正である ($a(t)>0$)．また明らかに物質が存在するから，密度 ρ も正である ($\rho>0$)．従って通常の物質で満たされているこの宇宙の圧力はダスト流体のときはほぼ 0 とみなせるものの，負になることはない，つまり $p\geq 0$ である．以上より，(7) 式から，$\ddot{a}<0$ が得られる．

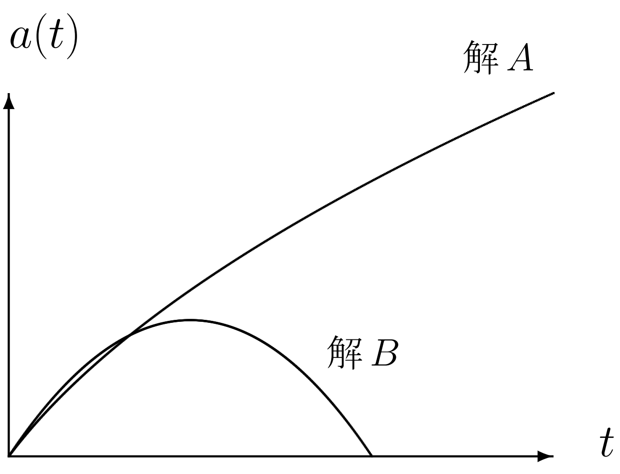


図 1: フリードマンモデルの宇宙の時間発展の様子

これは要するに宇宙の大きさの時間発展を表すスケールファクター $a(t)$ を表すグラフが，上に凸の形状をしていることを表す．この条件を満たす宇宙の時間発展の様子の概略を左の図に示す．解 A は永遠に膨張する解であるが，膨張の速度は徐々に緩やかになっていく．一方解 B も膨張の速度が徐々に緩やかになるが，ある時点で収縮に転じ，徐々に収縮速度を上げながら大きさ 0 にまでつぶれてしまう．このことをビッグクランチと呼ぶ．