

重力定数 κ の決定

さて、アインシュタイン方程式にはまだ未知の定数 κ が残っており、これを求めねば、実際上役に立たない。そこでこの節ではこのアインシュタインの重力定数 κ を求めることにする。

ポアソン方程式との比較

前節では、アインシュタイン方程式がニュートンの重力場の式、

$$\Delta\phi_G = \nabla^2\phi_G = 4\pi G\rho \quad (1)$$

に対応することを述べた。そこでこの節ではニュートンの極限において、アインシュタイン方程式が (1) 式に一致するという条件から κ を決定しよう。

定数 κ を決定するためにニュートンの極限を用いるのだから、無駄な一般化は必要がない。エネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ として最も簡単なケースであるダスト流体を考えよう。実際のところこのような圧力を無視できるようなダスト (塵) 流体は、天文学上も良い近似で用いられるようである。

今、この圧力 0 の流体の密度を ρ とするとき、エネルギー運動量テンソルは、 $T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu$ であり、 $|u^i| \ll c$ としてよいから、 $T^{00} = \rho u^0 u^0 \simeq \rho c^2$ のみが残り、あとの成分は全て 0 としてよい。今、

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2)$$

の両辺に $g^{\mu\nu}$ を掛けて、縮約を取ると、

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} \right) &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}R + \Lambda g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \\ &= R - \frac{1}{2}\delta^\mu_\mu R + \Lambda \delta^\mu_\mu \\ &= R - \frac{1}{2} \cdot 4R + 4\Lambda \\ &= -R + 4\Lambda \\ &= \kappa g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \\ &= \kappa T \end{aligned}$$

$$\therefore R = -\kappa T + 4\Lambda$$

となるので、これを再び、(2) 式に代入すると、

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(-\kappa T + 4\Lambda) + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

より、

$$R_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right) \quad (3)$$

を得る。ここで $T_{\mu\nu}$ 及び T がどのような形になるか考えてみよう、定義より、

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}T^{\alpha\beta}$$

であるが、今、 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ かつ $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ としてよいから、

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}T^{\alpha\beta} \\ &= (\eta_{\mu\alpha} + h_{\mu\alpha})(\eta_{\nu\beta} + h_{\nu\beta})\rho u^\alpha u^\beta \\ &\simeq \rho \eta_{\mu\alpha} u^\alpha \eta_{\nu\beta} u^\beta \end{aligned}$$

ここで、今考えている近似では $|u^i/c| \ll 1$ としてよいから、結局、 T_{00} 成分以外は全て 0 としてよい。一方 T_{00} は、

$$T_{00} \simeq \rho \eta_{0\alpha} u^\alpha \eta_{0\beta} u^\beta = \rho u^0 u^0 \simeq \rho c^2$$

となる。同様に T は、

$$T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \simeq (\eta^{\mu\nu} - \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h_{\alpha\beta})T_{\mu\nu} \simeq \eta^{00}T_{00} = -\rho c^2$$

となるから、結局、

$$R_{00} + \Lambda = \kappa \left(\rho c^2 - \frac{1}{2}\rho c^2 \right) = \frac{1}{2}\kappa\rho c^2 \quad (4)$$

が得られることになる。今ここで、リッチテンソルの定義より、

$$R_{00} = R_{0\mu 0}^{\mu} = \partial_{\mu}\Gamma_{00}^{\mu} - \partial_0\Gamma_{0\mu}^{\mu} + \Gamma_{00}^{\nu}\Gamma_{\nu\mu}^{\mu} + \Gamma_{0\mu}^{\nu}\Gamma_{\nu 0}^{\mu} \quad (5)$$

であるが、測地線の式のニュートン近似の場合と同じ近似を用いるため、接続係数に対しても同じ議論が出来るから、

$$\begin{aligned} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} &= \frac{1}{2}g^{\alpha\omega} \left(\frac{\partial g_{\omega\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\omega\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\omega}} \right) \\ &\simeq \frac{1}{2}(\eta^{\alpha\omega} - \eta^{\alpha\lambda}\eta^{\omega\sigma}h_{\lambda\sigma}) \left(\frac{\partial h_{\omega\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial h_{\omega\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial h_{\beta\gamma}}{\partial x^{\omega}} \right) \\ &\simeq \frac{1}{2}\eta^{\alpha\omega} \left(\frac{\partial h_{\omega\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial h_{\omega\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial h_{\beta\gamma}}{\partial x^{\omega}} \right) \end{aligned}$$

より、

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \simeq \frac{1}{2}\eta^{\alpha\omega} \left(\frac{\partial h_{\omega\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial h_{\omega\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial h_{\beta\gamma}}{\partial x^{\omega}} \right) \quad (6)$$

としてよい。今、(6)式の形より、この座標系で接続係数は $h_{\mu\nu}$ の1次のみからなる項の和として表され、定数項その他を含まない。よって(5)式において、後ろの第3, 4項目は $h_{\mu\nu}$ の2次以上からなる成分なので無視してよい。また、2項目は、重力場が時間変化しない条件より、 x^0 で微分しているからこれも0となってしまう。一方第1項目は $\mu = 0$ の成分が同じ理由でゼロになる以外は特に計算を簡略化は出来そうにない。そこで結局 R_{00} は、

$$R_{00} \simeq \partial_i\Gamma_{00}^i$$

となることが分かった。ここで Γ_{00}^i は、(6)式より、

$$\Gamma_{00}^i \simeq \frac{1}{2}\eta^{i\omega} \left(\frac{\partial h_{\omega 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial h_{\omega 0}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{00}}{\partial x^{\omega}} \right) = -\frac{1}{2}\eta^{i\omega} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^{\omega}} = -\frac{1}{2}\delta^{ij} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^j}$$

と求まるので、結局、

$$R_{00} \simeq \partial_i\Gamma_{00}^i \simeq \frac{\partial}{\partial x^i} \left(-\frac{1}{2}\delta^{ij} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^j} \right) = -\frac{1}{2}\delta^{ij} \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^i \partial x^j} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^{i2}} = -\frac{1}{2}\Delta h_{00}$$

が得られる。これを(4)式に代入すると、

$$-\frac{1}{2}\Delta h_{00} + \Lambda = \frac{1}{2}\kappa\rho c^2 \quad (7)$$

が得られる。さて我々は既に、測地線の式のニュートン近似において、重力ポテンシャルを ϕ_G とするとき、

$$h_{00} = -\frac{2\phi_G}{c^2}$$

を得ている。これを(7)式に代入すると、

$$\frac{1}{c^2}\Delta\phi_G + \Lambda = \frac{1}{2}\kappa\rho c^2$$

が成り立つから、

$$\Delta\phi_G + \Lambda c^2 = \frac{1}{2}\kappa c^4 \rho \quad (8)$$

が得られたことになる。さてここで再び (1) 式をここに記そう:

$$\Delta\phi_G = \nabla^2\phi_G = 4\pi G\rho \quad (9)$$

(8) 式と (9) 式を比較すると、ニュートン力学的極限によってきちんと (9) のポアソン方程式が再現されるためには、

$$\Lambda = 0, \kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

であればよいことが分かる。この Λ は宇宙定数と呼ばれ、後にアインシュタインによってこの方程式に追加されたが、ハッブルによって宇宙が膨張している事が発見されるとアインシュタイン最大の失敗としてアインシュタイン自身によって削除されたと、多くの科学の啓蒙書には紹介されていた。しかし、これまでに見てきたように、アインシュタインテンソルの一意性を考えると、最も一般的な解としてはむしろ含むべきとも考えられる。その上でしかしこの定数は、ニュートン近似で (9) 式と同じ形になるためには極めて小さい値で無いといけない。事実、最新の宇宙論では非常に小さな Λ はむしろ導入しないと (一般相対論では) 上手く宇宙の膨張を説明できないことが分かってきている (らしい)。