アインシュタインテンソルの導入

この項では重力場の方程式（=アインシュタイン方程式）において重要な役割をするアインシュタインテンソルを定義しよう.

リッチテンソル

リーマンテンソルを次のように縮約して得られる 2 階の共変テンソルをリッチテンソルと呼ぶ.

$$R_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu} \tag{1}$$

リッチテンソルは添字の入れ替えに対して対称である.; 実際, $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}$ であったから, この両辺に $g^{\alpha\gamma}$ を掛けて縮約をとると,

$$\begin{aligned}
g^{\alpha\gamma} R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= g^{\alpha\gamma} R_{\gamma\delta\alpha\beta} \\
\therefore g^{\alpha\gamma} g_{\alpha\sigma} R^{\sigma}_{\beta\gamma\delta} &= g^{\alpha\gamma} g_{\gamma\sigma} R^{\sigma}_{\delta\alpha\beta} \\
\therefore \delta^{\gamma}{}_{\sigma} R^{\sigma}_{\beta\gamma\delta} &= \delta^{\alpha}{}_{\sigma} R^{\sigma}_{\delta\alpha\beta} \\
\therefore R^{\gamma}_{\beta\gamma\delta} &= R^{\alpha}_{\delta\alpha\beta} \\
\therefore R_{\beta\delta} &= R_{\delta\beta}
\end{aligned}$$

となる.

スカラー曲率

リッチテンソルをさらに縮約すると次に示されるスカラー曲率を得る.

$$R \stackrel{\text{def}}{=} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

アインシュタインテンソル

ビアンキの恒等式からアインシュタインテンソルに関する 1 つの恒等式を次のようにして得ることが出来る．まず，ビアンキの恒等式，

$$\nabla_\delta R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} + \nabla_\gamma R^\mu{}_{\alpha\delta\beta} + \nabla_\beta R^\mu{}_{\alpha\gamma\delta} = 0$$

を $\delta = \mu$ によって縮約 (=和) をとると，リッチテンソルの定義と $R^\mu{}_{\alpha\gamma\delta} = -R^\mu{}_{\alpha\delta\gamma}$ によって，

$$\nabla_\mu R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} + \nabla_\gamma R_{\alpha\beta} - \nabla_\beta R_{\alpha\gamma} = 0$$

が得られる．この両辺に $g^{\gamma\alpha}$ を掛けて和をとると，計量条件により $g^{\gamma\alpha}$ は共変微分に対して定数のように振舞う，つまり

$$\nabla_\mu \left(g^{\gamma\alpha} A\right) = \left(\nabla_\mu g^{\gamma\alpha}\right) A + g^{\gamma\alpha} \nabla_\mu A = g^{\gamma\alpha} \nabla_\mu A$$

となることから，

$$\nabla_\mu g^{\gamma\alpha} R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} + \nabla_\gamma g^{\gamma\alpha} R_{\alpha\beta} - \nabla_\beta g^{\gamma\alpha} R_{\alpha\gamma} = 0$$

より，

$$\nabla_\mu R^\mu{}_\beta + \nabla_\gamma R^\gamma{}_\beta - \nabla_\beta R = 0$$

が得られる．これより，

$$\nabla_\mu R^\mu{}_\beta + \nabla_\mu R^\mu{}_\beta - \nabla_\mu \left(\delta^\mu{}_\beta R\right) = 0$$

のように変形すれば，

$$2\nabla_\mu \left(R^\mu{}_\beta - \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\beta R\right) = 0$$

を得る．この式に $g^{\beta\rho}$ を掛けてやると，再び計量条件より，

$$\nabla_\mu \left(R^{\mu\rho} - \frac{1}{2} g^{\mu\rho} R\right) = 0 \tag{2}$$

が成り立つ事が示される．最後の式において，

$$G^{\mu\rho} \overset{\mathrm{def}}{=} R^{\mu\rho} - \frac{1}{2} g^{\mu\rho} R$$

とおき，$G^{\mu\rho}$ をアインシュタインテンソルと呼ぶ．