# アインシュタイン方程式が満たすべき条件とその解について

アインシュタインは物理学者のエルンスト・マッハ (1838〜1916) の影響を受けて，「物体のもつ慣性は，宇宙内にある全ての物質の存在に起因する」というマッハの原理を拡張し数学的に表現する事によって重力場の方程式を構築した．具体的には，

**時空の幾何学** $\Longrightarrow$ (重力) $\Longrightarrow$ (物質の運動) $\Longrightarrow$ **物質の分布**

による物質の分布の規定と，

**時空の幾何学** $\Longleftarrow$ (重力) $\Longleftarrow$ **物質の分布**

による時空構造の規定により，

**時空の幾何学** $=$ **物質の分布**

が数学的にも成り立つべきである，しかも，それらは一般の座標変換に対して共変であるようなテンソルで表現される (従って座標基底の変換に伴う分以外は変化しない) べきであるという審美眼に基づいて今日アインシュタイン方程式と呼ばれる重力場の方程式を導いた．以下にその満たすべき条件と解について述べよう．

**条件 1** アインシュタイン方程式は重力場の方程式である．それはニュートン力学における万有引力の式に対応する．従ってそれはニュートン力学的極限を取れば一致しなくてはならない． ニュートン力学における万有引力の式は一般に，物体の密度を $\rho$，重力ポテンシャルを $\phi_G$ とすれば，

$$\Delta\,\phi_G = \nabla^2\,\phi_G = 4\pi G\rho \tag{1}$$

というポアソン方程式で表される．つまりアインシュタイン方程式はニュートン力学的極限をとると (1) が得られるものでなければならない．

**条件 2** アインシュタイン方程式の左辺はリーマン計量 $g_{\mu\nu}$ に関する項だけから出来ている式であるべきで $g_{\mu\nu}$ は 10 個の独立した成分をもつ． 一方右辺の物質場を表すテンソルはエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ を含み，$T_{\mu\nu}$ は対称テンソルのためやはり 10 個の独立した成分を持つ．従って最も単純な形となるのは，右辺が $\kappa$ を定数として $\kappa T_{\mu\nu}$ の形のときである．そこでこの形の右辺に対して最も単純な形の対称テンソル $G_{\mu\nu}$ を見つけたい．(もし存在すれば)

**条件 3** $G_{\mu\nu}$ は $g_{\alpha\beta}$ に関して，できるだけ簡単な関数であって欲しい．そうでないと方程式の解を求める事が難しくなってしまう．

**条件 4** 物質が無い場合 ($T_{\mu\nu}=0$) には，$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$ を解としてもっていなければならない．そうでないと物質が全く無いのに，時空が平坦である解 ( $=$ ミンコフスキー時空) が存在しない事になってしまう．但しこれは，$T_{\mu\nu}=0$ のとき，必ず時空が平坦でなければならないということを意味しているわけではない．時空が完全に平坦であるためには自由度が 20 あるリーマンテンソル $R^{\mu}_{\alpha\beta\gamma}$ の成分が全て 0 であることが必要であるが，$g_{\mu\nu}$ の自由度は 10 しかないので残りの 10 自由度分 $R^{\mu}_{\alpha\beta\gamma}$ の不定性が残ってしまう．(具体的には例えば，$G_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}-\dfrac{1}{2}g_{\mu\nu}R=0$ のような形の場合，$R_{\mu\nu}=0$ となるが，これは $R_{\mu\nu}\overset{\text{def}}{=}R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu}$ より $R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu}=0$ が云えたに過ぎない．)

**条件 5** この要請から考えられる最も単純なケースである $G_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}$ は除外される．右辺が全て 0 のとき，$g_{\mu\nu}$ は全て 0 となり，ミンコフスキー時空を解に持たないからである．

**条件 6** さらに $G_{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ に関する 1 階微分だけからつくることもできない．何故なら局所ローレンツ系を取れば $g_{\mu\nu,\alpha}$ も $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ も全て 0 に出来るのでそれらだけからつくられたテンソルはあらゆる座標系で恒等的に 0 となってしまい，ニュートン極限で (1) のポアソン方程式を満たさないからである．

**条件 7** これより，$G_{\mu\nu}$ は $g_{\alpha\beta}$ に関して 2 階微分を含まざるを得ないが，だとするなら最も簡単なケースである，$g_{\alpha\beta}$ の 2 階微分に対して線形であって欲しい．これはニュートンの万有引力の法則が 2 階微分に対して線形であるポアソン方程式で表されることにも矛盾しない．

**条件 8** 保存則として恒等的に，$\nabla_\nu T^{\mu\nu}=0$ が成り立つことより，$\nabla_\nu G^{\mu\nu}=0$ も恒等的に成り立たなければならない．

次に示す定理により，以上の条件，1〜8 のうち，2, 3, 7, 8, を満たすような共変テンソルは定数倍を除いて次の形に限られる事が示せる．

**定理 0.1. アインシュタインテンソルの一意性の定理**
$g_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu,\lambda}\left(\stackrel{\text{def}}{=}\dfrac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\right)$, $g_{\mu\nu,\lambda\sigma}\left(\stackrel{\text{def}}{=}\dfrac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda \partial x^\sigma}\right)$, だけから作られ，$g_{\mu\nu}$ の 2 階微分 $(= g_{\mu\nu,\lambda\sigma})$ については 1 次式となっているような，2 階対称テンソル $S^{\mu\nu}$ は，

$$S^{\mu\nu} = C_1 R^{\mu\nu} + C_2 g^{\mu\nu} R + C_3 g^{\mu\nu}$$

に限られる．特に，

$$\nabla_\nu S^{\mu\nu} = 0$$

ならば，

$$S^{\mu\nu} = C\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + \Lambda g^{\mu\nu}\right)$$

に限られる．但し，$C_1$, $C_2$, $C_3$, $C$, $\Lambda$ は任意の定数とする．

前節で説明したように，添字の上げ下げで式の形が変わらないから，この定理により，アインシュタイン方程式は，$C \neq 0$ を定数として，

$$C\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu}\right) = \kappa T_{\mu\nu}$$

以外の形ではありえないことが分かる．今のところ右辺の $\kappa$ も未知定数なので両辺を $C$ で割って改めて定数を $\kappa$ としてまとめると，

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

が求める重力場の方程式の候補である．これは，簡単に，2〜8 を満たすことが示せるので，残るのは条件 1 だけとなる．実はこれを用いると $\kappa$ の値が $\kappa = \dfrac{8\pi G}{c^4}$ と求まり，この新しい相対論的重力場の方程式の形が完全に求まる．