1　変分原理によってアインシュタイン方程式を導く

通常の 4 次元体積要素:

$$d^4x \equiv dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \tag{1}$$

は一般座標変換に対して，通常通り座標変換に対するヤコビアンが付いて，

$$d^4x = \frac{\partial(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3)}{\partial(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})} d^4x' = \det\left[\frac{\partial x}{\partial x'}\right] d^4x' \tag{2}$$

と変換されるため，座標変換で不変ではない．但し，$\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\beta'}}$ を α 行 β' 列の成分とする行列の行列式=ヤコビアンを，$\det\left[\dfrac{\partial x}{\partial x'}\right]$ と置いた．また，別の記事で述べたように，$x^{\beta'}$ は $x'^{\beta'}$，つまり座標変換 $x \to x'$ 後の β' 成分を表すものとする．

いま，計量 $g_{\mu\nu}$ を μ 行 ν 列とする行列式を，

$$g \overset{\text{def}}{=} \det\left[g_{\mu\nu}\right] \tag{3}$$

と置くことにすると，2 階の共変テンソルである計量 $g_{\mu\nu}$ の変換則，

$$g_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\beta'}} g_{\mu\nu} \tag{4}$$

を，全く同じことであるが，それぞれの行列の積

$$\left[g_{\alpha'\beta'}\right] = \left[\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}}\right]\left[\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\beta'}}\right]\left[g_{\mu\nu}\right] \tag{5}$$

として見てやれば，両辺の行列式を取ることによって，

$$g' = \det\left[g_{\alpha'\beta'}\right] = \det\left[\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}}\right]\det\left[\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\beta'}}\right]\det\left[g_{\mu\nu}\right] = \left(\det\left[\frac{\partial x}{\partial x'}\right]\right)^2 g \tag{6}$$

が得られるが，座標変換を上手く選べば上の式の左辺の g' はミンコフスキー計量の行列 $\eta_{\mu\nu}$ の行列式

$$\eta \overset{\text{def}}{=} \det[\eta_{\mu\nu}] = \det\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -1 \tag{7}$$

と一致する．従って，

$$\left(\det\left[\frac{\partial x}{\partial x'}\right]\right)^2 g = \eta = -1 < 0 \tag{8}$$

より，任意の g に対して $g < 0$ が成り立つから，再度 (6) 式より，

$$\det\left[\frac{\partial x}{\partial x'}\right] = \sqrt{\frac{-g'}{-g}} \tag{9}$$

が成り立つ．従ってこれを用いると，

$$d^4x = \det\left[\frac{\partial x}{\partial x'}\right] d^4x' = \sqrt{\frac{-g'}{-g}} d^4x' \tag{10}$$

より，

$$\sqrt{-g}\, d^4x = \sqrt{-g'}\, d^4x' \tag{11}$$

が成り立ち，これが座標変換で不変な 4 次元体積要素であることが分かる．ここで求めたいアインシュタイン方程式は，大雑把に言って，

$$\text{時空の歪み} = \text{エネルギーの分布} \tag{12}$$

という形のものを期待しているのであるから，当然その作用積分はあるスカラー関数の一定の時空領域上での積分で，そのスカラー関数，即ちラグランジアンは，空間の歪み，つまり時空の幾何学に関する項 $\mathscr{L}_g$ と，物質やエネルギーの分布に関する項 $\mathscr{L}_m$ の 2 つの項からなるべきである．従って作用 S は，

$$S = S_g + S_m = \int_\Omega \mathscr{L}_g \sqrt{-g} d^4x + \int_\Omega \mathscr{L}_m \sqrt{-g} d^4x \tag{13}$$

となるべきである．但し，今考えているのは作用積分なので，積分領域 Ω は常に同じ 4 次元時空上の領域に固定しておく．以下，積分領域 Ω の表示は省略して，ラグランジアン $\mathscr{L}_g$ 及び $\mathscr{L}_m$ を求めよう．

1.1 アインシュタイン・ヒルベルト作用

時空の幾何学量は一般に，計量テンソルと，リーマンテンソル及び当然そこから作られるリッチテンソルやスカラー曲率である．

いま，考えられるラグランジアン $\mathscr{L}_g$ の候補はテンソルの次数を上げればいくらでも考えられるが，出来るだけ簡単なものの中から見つけたいものである．そこで取り敢えず，この段階では上手くいくかどうかは分からないが，最も簡単そうな，

$$\mathscr{L}_g = a + bR \tag{14}$$

と置いて，係数 a, b を求めてみよう．これで上手くいけば，計算で大幅に楽できるだろう．

まず最初に S_g の変分を考えてみると，

$$\delta S_g = \delta \int \mathscr{L}_g \sqrt{-g} d^4x = a \int \delta(\sqrt{-g}) d^4x + b \int \delta(R\sqrt{-g}) d^4x \tag{15}$$

となるので，$\delta(\sqrt{-g})$ を求める必要が出てくる．これを求めるために次の補題を見ていこう:

補題 1.1.

$$\frac{\delta g}{\delta g_{\mu\nu}} = g g^{\mu\nu} \tag{16}$$

証明. $g^{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ の逆行列だから，線形代数のクラメールの公式より，余因子行列を $\tilde{g}^{\mu\nu}$ とすると，

$$g^{\mu\nu} = \frac{\tilde{g}^{\mu\nu}}{g} \tag{17}$$

が成り立つ．従って，

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = g g^{\mu\nu} \tag{18}$$

より，

$$\tilde{g}^{\mu\nu} g_{\nu\alpha} = g g^{\mu\nu} g_{\nu\alpha} = g \delta^\mu_\alpha \tag{19}$$

が成り立つので，両辺を $g_{\alpha\beta}$ で偏微分すると，

$$\tilde{g}^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial g_{\alpha\beta}} = \frac{\partial g}{\partial g_{\alpha\beta}} \delta^\mu_\alpha \tag{20}$$

より，

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\alpha\beta}} = \tilde{g}^{\alpha\nu} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial g_{\alpha\beta}} = \tilde{g}^{\alpha\nu} \delta_{\nu\beta} = \tilde{g}^{\alpha\beta} = g g^{\alpha\beta} \tag{21}$$

従って，偏微分を変分に直して，

$$\frac{\delta g}{\delta g_{\mu\nu}} = g g^{\mu\nu} \tag{22}$$

が示された． □

また次も成り立つ:

補題 1.2.

$$\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu} \tag{23}$$

証明.

$$\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{\partial(-g)^{\frac{1}{2}}}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2}(-g)^{-\frac{1}{2}}(-1)\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} \tag{24}$$

ここで補題 1.1 を用いると,

$$-\frac{1}{2\sqrt{-g}}\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}gg^{\mu\nu} = \frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu} \tag{25}$$

よって，偏微分を変分に直して,

$$\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu} \tag{26}$$

が示された. □

補題 1.3.

$$g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} \tag{27}$$

証明. いま,

$$\delta(g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}) = \delta(\delta^{\alpha}_{\alpha}) = \delta(4) = 0 \tag{28}$$

であるから,

$$\delta(g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}) = \delta(g^{\alpha\beta})g_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} = 0 \tag{29}$$

が成り立つ．従って,

$$g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} \tag{30}$$

が示された.

定理 1.4.

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{31}$$

補題 1.2 より,

$$\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu} \tag{32}$$

従って,

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \tag{33}$$

であるので，この式の右辺に補題 1.3 を適用すると,

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -\frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{34}$$

より定理が示された. □

定理 1.4 を用いるとまず,

$$\delta(a\sqrt{-g}) = -\frac{a}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{35}$$

が得られ，次に，

$$\delta(R\sqrt{-g}) = (\delta R)\sqrt{-g} + R\delta(\sqrt{-g}) \tag{36}$$
$$= \sqrt{-g}\delta(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) - \frac{R}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{37}$$
$$= \sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{38}$$
$$= \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \tag{39}$$

が得られるが，いま，さてここでスカラー曲率 R を展開したらリッチテンソル $R_{\mu\nu}$ が出てきてしまったので，リッチテンソルについても定義を示しておこう:

$$R_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu} \tag{40}$$

この右辺に出てきたのはリーマンテンソルと呼ばれ，次の式で定義される:

$$R^{\mu}_{\ \nu\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\alpha\Gamma^{\mu}_{\ \nu\beta} - \partial_\beta\Gamma^{\mu}_{\ \nu\alpha} + \Gamma^{\lambda}_{\ \nu\beta}\Gamma^{\mu}_{\ \lambda\alpha} - \Gamma^{\lambda}_{\ \nu\alpha}\Gamma^{\mu}_{\ \lambda\beta} \tag{41}$$

よってこれを (41) 式と比較することにより，

$$R_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} R^{\sigma}_{\ \mu\sigma\nu} = \partial_\sigma\Gamma^{\sigma}_{\ \mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^{\sigma}_{\ \mu\sigma} + \Gamma^{\lambda}_{\ \mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\ \lambda\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\ \mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\ \lambda\nu} \tag{42}$$

であるので，

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta\left(\partial_\sigma\Gamma^{\sigma}_{\ \mu\nu}\right) - \delta\left(\partial_\nu\Gamma^{\sigma}_{\ \mu\sigma}\right) + \delta\left(\Gamma^{\lambda}_{\ \mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\ \lambda\sigma}\right) - \delta\left(\Gamma^{\lambda}_{\ \mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\ \lambda\nu}\right) \tag{43}$$

が成り立つが，変分と偏微分の順序は入れ替えられるので，

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_\sigma\left(\delta\Gamma^{\sigma}_{\ \mu\nu}\right) - \partial_\nu\left(\delta\Gamma^{\sigma}_{\ \mu\sigma}\right) + \delta\left(\Gamma^{\lambda}_{\ \mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\ \lambda\sigma}\right) - \delta\left(\Gamma^{\lambda}_{\ \mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\ \lambda\nu}\right) \tag{44}$$
$$= \partial_\sigma\left(\delta\Gamma^{\sigma}_{\ \mu\nu}\right) - \partial_\nu\left(\delta\Gamma^{\sigma}_{\ \mu\sigma}\right) + \delta\left(\Gamma^{\lambda}_{\ \mu\nu}\right)\Gamma^{\sigma}_{\ \lambda\sigma} + \Gamma^{\lambda}_{\ \mu\nu}\delta\left(\Gamma^{\sigma}_{\ \lambda\sigma}\right) - \delta\left(\Gamma^{\lambda}_{\ \mu\sigma}\right)\Gamma^{\sigma}_{\ \lambda\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\ \mu\sigma}\delta\left(\Gamma^{\sigma}_{\ \lambda\nu}\right) \tag{45}$$
$$= \left[\partial_\sigma\left(\delta\Gamma^{\sigma}_{\ \mu\nu}\right) + \delta\left(\Gamma^{\lambda}_{\ \mu\nu}\right)\Gamma^{\sigma}_{\ \lambda\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\ \mu\sigma}\delta\left(\Gamma^{\sigma}_{\ \lambda\nu}\right) - \delta\left(\Gamma^{\lambda}_{\ \mu\sigma}\right)\Gamma^{\sigma}_{\ \lambda\nu}\right] - \left[\partial_\nu\left(\delta\Gamma^{\sigma}_{\ \mu\sigma}\right) - \Gamma^{\lambda}_{\ \mu\nu}\delta\Gamma^{\sigma}_{\ \lambda\sigma}\right] \tag{46}$$
$$= \nabla_\sigma\left(\delta\Gamma^{\sigma}_{\ \mu\nu}\right) - \nabla_\nu\left(\delta\Gamma^{\sigma}_{\ \mu\sigma}\right) \tag{47}$$

ここで，

$$\Gamma^{\alpha}_{\ \beta\gamma}{}^{*} \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma^{\alpha}_{\ \beta\gamma} + \delta\Gamma^{\alpha}_{\ \beta\gamma} \tag{48}$$

と置くと，

$$\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}\Gamma^{\alpha}_{\ \beta\gamma} = \Gamma^{\alpha'}_{\ \beta'\gamma'} - \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\gamma'}} \tag{49}$$

かつ，

$$\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}\Gamma^{\alpha}_{\ \beta\gamma}{}^{*} = \Gamma^{\alpha'}_{\ \beta'\gamma'}{}^{*} - \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\gamma'}} \tag{50}$$

が成り立つから，

$$\delta\Gamma^{\alpha}_{\ \beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\ \beta\gamma}{}^{*} - \Gamma^{\alpha}_{\ \beta\gamma} \tag{51}$$

に対して，

$$\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}\delta\Gamma^{\alpha}_{\ \beta\gamma} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}\left[\Gamma^{\alpha}_{\ \beta\gamma}{}^{*} - \Gamma^{\lambda}_{\ \mu\nu}\right] = \Gamma^{\alpha'}_{\ \beta'\gamma'}{}^{*} - \Gamma^{\alpha'}_{\ \beta'\gamma'} = \delta\Gamma^{\alpha'}_{\ \beta'\gamma'} \tag{52}$$

となり，$\delta\Gamma^{\alpha}_{\ \beta\gamma}$ はテンソルになる．従って，(47) 式は，3 階の混合テンソルの共変微分で 2 階の共変テンソルにな

る．(46) 式を (39) 式右辺第 2 項に代入して積分すると，部分積分と添字の入れ替えに注意すると，

$$\int_\Omega \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\sigma (\delta \Gamma^\sigma_{\mu\nu}) d^4x + \int_\Omega \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left[\delta(\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) \Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \delta(\Gamma^\sigma_{\lambda\nu}) - \delta(\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}) \Gamma^\sigma_{\lambda\nu} \right] d^4x \tag{53}$$

$$= \int_\Omega \partial_\sigma \left[\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \right] d^4x - \int_\Omega \partial_\sigma \left[\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \right] \delta \Gamma^\sigma_{\mu\nu} d^4x + \int_\Omega \sqrt{-g} \delta \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \left[\Gamma^\lambda_{\sigma\lambda} g^{\mu\nu} - \Gamma^\mu_{\lambda\sigma} g^{\lambda\nu} - \Gamma^\nu_{\sigma\lambda} g^{\mu\lambda} \right] d^4x \tag{54}$$

$$= 0 - \int_\Omega \sqrt{-g} \delta \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \left[\partial_\sigma g^{\mu\nu} + \cancel{\Gamma^\lambda_{\sigma\lambda} g^{\mu\nu}} \right] d^4x + \int_\Omega \sqrt{-g} \delta \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \left[\cancel{\Gamma^\lambda_{\sigma\lambda} g^{\mu\nu}} - \Gamma^\mu_{\lambda\sigma} g^{\lambda\nu} - \Gamma^\nu_{\sigma\lambda} g^{\mu\lambda} \right] d^4x \tag{55}$$

$$= - \int_\Omega \sqrt{-g} \delta \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \left[\partial_\sigma g^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma} g^{\lambda\nu} + \Gamma^\nu_{\sigma\lambda} g^{\mu\lambda} \right] d^4x \tag{56}$$

$$= - \int_\Omega \sqrt{-g} \delta \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \nabla_\sigma g^{\mu\nu} d^4x \tag{57}$$

$$= 0 \tag{58}$$

同様に第 2 項の積分も，

$$- \int_\Omega \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \left(\delta \Gamma^\sigma_{\ \mu\sigma} \right) d^4x + \int_\Omega \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\ \mu\nu} \delta \Gamma^\sigma_{\ \lambda\sigma} d^4x \tag{59}$$

$$= - \int_\Omega \partial_\nu \left[\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\sigma_{\ \mu\sigma} \right] d^4x + \int_\Omega \partial_\nu \left[\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \right] \delta \Gamma^\sigma_{\ \mu\sigma} d^4x + \int_\Omega \sqrt{-g} g^{\lambda\nu} \Gamma^\mu_{\ \lambda\nu} \delta \Gamma^\sigma_{\ \mu\sigma} d^4x \tag{60}$$

$$= 0 + \int_\Omega \left[\sqrt{-g} \partial_\nu g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} \Gamma^\lambda_{\ \nu\lambda} g^{\mu\nu} \right] \delta \Gamma^\sigma_{\ \mu\sigma} + \int_\Omega \sqrt{-g} g^{\lambda\nu} \Gamma^\mu_{\ \lambda\nu} \delta \Gamma^\sigma_{\ \mu\sigma} d^4x \tag{61}$$

$$= \int_\Omega \sqrt{-g} \delta \Gamma^\sigma_{\ \mu\sigma} \left[\partial_\nu g^{\mu\nu} + \Gamma^\nu_{\ \lambda\nu} g^{\mu\lambda} + \Gamma^\mu_{\ \lambda\nu} g^{\lambda\nu} \right] d^4x \tag{62}$$

$$= \int_\Omega \sqrt{-g} \delta \Gamma^\sigma_{\ \mu\sigma} \nabla_\nu g^{\mu\nu} \tag{63}$$

$$= 0 \tag{64}$$

となり，全てなくなってしまう．結局 (39) 式右辺の積分をとると第 1 項のみとなるので，結局,

$$\delta S_g = \delta \int (a + bR) \sqrt{-g} d^4x \tag{65}$$

$$= \int \left[-\frac{a}{2} g_{\mu\nu} + b \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \right] \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x \tag{66}$$

$$= \int b \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \frac{a}{2b} g_{\mu\nu} \right) \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x \tag{67}$$

が得られた．ここで通常式を簡単にするために,

$$\Lambda \equiv -\frac{a}{2b} \tag{68}$$

と置き，この Λ を宇宙定数と呼ぶ.

1.2 エネルギー運動量テンソルを定義する

次に，S_m の変分 δS_m について考えてみる．いま $\mathscr{L}_m$ は，物質場を ϕ_A $(A = 1, 2, \cdots,)$ とすると，ラグランジアン $\mathscr{L}_m$ は，計量 $g^{\mu\nu}$ と物質場 ϕ_A の関数である．ここでもし ϕ_A で変分をとると,

$$\delta \int \mathscr{L}_m \sqrt{-g} d^4x = \int \frac{\partial \mathscr{L}_m \sqrt{-g}}{\partial \phi_A} \delta \phi_A + \frac{\partial \mathscr{L}_m \sqrt{-g}}{\partial \phi_{A,\,\alpha}} \delta \phi_{A,\,\alpha} d^4x \tag{69}$$

$$= \int \frac{\partial \mathscr{L}_m \sqrt{-g}}{\partial \phi_A} \delta \phi_A d^4x + \int \frac{\partial \mathscr{L}_m \sqrt{-g}}{\partial \phi_{A,\,\alpha}} \partial_\alpha \delta \phi_A d^4x \tag{70}$$

$$= \int \frac{\partial \mathscr{L}_m \sqrt{-g}}{\partial \phi_A} \delta \phi_A d^4x + \int \partial_\alpha \left[\frac{\partial \mathscr{L}_m \sqrt{-g}}{\partial \phi_{A,\,\alpha}} \delta \phi_A \right] d^4x - \int \partial_\alpha \left[\frac{\partial \mathscr{L}_m \sqrt{-g}}{\partial \phi_{A,\,\alpha}} \right] \delta \phi_A d^4x \tag{71}$$

$$= \int \frac{\partial \mathscr{L}_m \sqrt{-g}}{\partial \phi_A} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \mathscr{L}_m \sqrt{-g}}{\partial \phi_{A,\,\alpha}} \delta \phi_A d^4x = 0 \tag{72}$$

より，運動方程式,

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \mathscr{L}_m\sqrt{-g}}{\partial \phi_{A,\,\alpha}} - \frac{\partial \mathscr{L}_m\sqrt{-g}}{\partial \phi_A} = 0 \tag{73}$$

が得られるが，これは求めたい求めたい作用積分ではない．そこでここでは逆に $g^{\mu\nu}$ に関する変分をとると,

$$\begin{aligned}
\delta\int \mathscr{L}_m\sqrt{-g}d^4x &= \int \frac{\partial(\mathscr{L}\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial(\mathscr{L}\sqrt{-g})}{\partial {g^{\mu\nu}}_{,\alpha}}\delta {g^{\mu\nu}}_{,\alpha} d^4x &(74)\\
&= \int \frac{\partial(\mathscr{L}\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu}d^4x + \int \frac{\partial(\mathscr{L}\sqrt{-g})}{\partial {g^{\mu\nu}}_{,\alpha}}\partial_\alpha \delta g^{\mu\nu}d^4x &(75)\\
&= \int \frac{\partial(\mathscr{L}\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu}d^4x + \int \partial_\alpha\left[\frac{\partial(\mathscr{L}\sqrt{-g})}{\partial {g^{\mu\nu}}_{,\alpha}}\delta g^{\mu\nu}\right]d^4x - \int \partial_\alpha\left[\frac{\partial(\mathscr{L}\sqrt{-g})}{\partial {g^{\mu\nu}}_{,\alpha}}\right]\delta g^{\mu\nu}d^4x &(76)\\
&= \int \left\{\frac{\partial(\mathscr{L}\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[\frac{\partial(\mathscr{L}\sqrt{-g})}{\partial {g^{\mu\nu}}_{,\alpha}}\right]\right\}\delta g^{\mu\nu}d^4x &(77)
\end{aligned}$$

が得られるが，積分の中身を取り出して，$-\dfrac{2}{\sqrt{-g}}$ を掛けた,

$$-\frac{2}{\sqrt{-g}}\left\{\frac{\partial(\mathscr{L}\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[\frac{\partial(\mathscr{L}\sqrt{-g})}{\partial {g^{\mu\nu}}_{,\alpha}}\right]\right\} \tag{78}$$

は計量の対称性をそのまま反映して明らかに対称な 2 階の共変テンソルになる．そこで,

$$T_{\mu\nu} \overset{\text{def}}{=} -\frac{2}{\sqrt{-g}}\left\{\frac{\partial(\mathscr{L}\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[\frac{\partial(\mathscr{L}\sqrt{-g})}{\partial {g^{\mu\nu}}_{,\alpha}}\right]\right\} \tag{79}$$

と置けば，これは物質やエネルギーの場に関する量になる．これより,

$$\delta S_m = \int -\frac{\sqrt{-g}}{2}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{80}$$

が得られるから，結局,

$$\begin{aligned}
\delta S &= \delta S_g + \delta S_m &(81)\\
&= \int b\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \frac{a}{2b}g_{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}d^4x + \int -\frac{\sqrt{-g}}{2}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}d^4x &(82)\\
&= \int b\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \frac{a}{2b}g_{\mu\nu} - \frac{1}{2b}T_{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}d^4x &(83)\\
&= 0 &(84)
\end{aligned}$$

が成り立つ．従って,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \frac{a}{2b}g_{\mu\nu} - \frac{1}{2b}T_{\mu\nu} = 0 \tag{85}$$

つまり,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \frac{a}{2b}g_{\mu\nu} = \frac{1}{2b}T_{\mu\nu} \tag{86}$$

が得られた．この式において，既に説明したように，$\Lambda \equiv -\dfrac{a}{2b}$，$\kappa \equiv \dfrac{1}{2b}$ と置くと,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{87}$$

となり，アインシュタイン方程式が導けたことが分かる．