0.1　双対ベクトル基底の導入

$\boldsymbol{V}$ がベクトル量である場合に実際には座標を導入して計算するであろう．そのためには例えばその反変成分 V^ν を求める必要がある．さてどうすればいいのか？一番簡単なのは基底と内積を取ることであろう．そこで次の計算をしてみよう:

$$\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{e}_\nu = V^\mu\boldsymbol{e}_\mu\cdot\boldsymbol{e}_\nu = g_{\mu\nu}V^\mu \tag{1}$$

ただし，$g_{\mu\nu} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \boldsymbol{e}_\mu\cdot\boldsymbol{e}_\nu$ を使った．

これを見ると，本来 V^ν を求めたかったのに，得られたのは，$g_{\mu\nu}V^\mu$ であることがわかる．そこで次のように考えてみたらどうだろうか？

いま，$\boldsymbol{V}$ は，$\boldsymbol{V} = V^\mu\boldsymbol{e}_\mu$ のように展開できる．そこである演算を用意して $V^\mu\boldsymbol{e}_\mu * \boldsymbol{e}^\nu = V^\mu\delta^\nu_\mu$ とできれば，最右辺は V^ν に等しいではないか？ところでこう考えると，よくわからない演算 $*$ とよくわからない基底みたいなもの $\boldsymbol{e}^\nu$ が必要なわけだが，ここでこの 2 つについてわかっている関係式は，

$$V^\mu\boldsymbol{e}_\mu * \boldsymbol{e}^\nu = V^\mu\delta^\nu_\mu = V^\nu \tag{2}$$

が任意のベクトル量で成り立つことである．そこで，

$$\boldsymbol{e}_\mu * \boldsymbol{e}^\nu = \delta^\nu_\mu \tag{3}$$

であればいいことがわかる． さてこれだけのことだが，この e^ν のことを双対ベクトル基底と呼び，演算は普通よく使われている記号に合わせるならば，

$$\langle\boldsymbol{e}^\nu, \boldsymbol{e}_\mu\rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} \delta^\nu_\mu (= \boldsymbol{e}_\mu * \boldsymbol{e}^\nu = \boldsymbol{e}^\nu * \boldsymbol{e}_\mu) \tag{4}$$

で表す．

定義 0.1.1. 双対ベクトル基底

次の定義式を満たす $\boldsymbol{e}^{\mu}$ を基底 $\boldsymbol{e}_{\mu}$ に対応する「双対ベクトル基底」と呼ぶ.

$$\left\langle \boldsymbol{e}^{\mu},\, \boldsymbol{e}_{\nu} \right\rangle = \delta^{\mu}{}_{\nu}$$

なお, ”$\left\langle *,\, * \right\rangle$”は, 双対ベクトルとベクトルの積（のようなもの）の演算を表すものとする.

補題 0.1.2. 双対ベクトル基底の一般座標変換基底 $\boldsymbol{e}_{\mu}$ が,

$$\boldsymbol{e}_{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \boldsymbol{e}_{\mu}$$

と座標変換されるとき, 双対ベクトル基底 $\boldsymbol{e}^{\mu}$ は,

$$\boldsymbol{e}^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \boldsymbol{e}^{\mu}$$

のように座標変換される.

上の記号法についての注意

注意深い方はお気付きと思うが, 上の表記法はちょっと変である.

$$\boldsymbol{e}_{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \boldsymbol{e}_{\mu}$$

において $\boldsymbol{e}_{\mu} \to \boldsymbol{e}_{\mu'}$ という変換を行っているわけだが, 本来の意味で考えればこれは左辺と右辺の添字だけ変わっているのだから, 全く同じものか, せいぜい同じ基底の組の別成分を表しているとしかならないはずである. しかしもちろん上の式はそういう意味を示しているわけではない. 正しく書けば,

$$\boldsymbol{e}'_{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\mu'}} \boldsymbol{e}_{\mu} \tag{*}$$

となり，座標系が x から x'，基底の組が $\boldsymbol{e}^{\mu}$ から $\boldsymbol{e}'^{\mu'}$ に変わっていることを表している．しかし (*) はあまりに煩雑である．　かといって，

$$\boldsymbol{e}'_{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\mu}} \boldsymbol{e}_{\mu}$$

と書くわけにもいかない．その場合，いちいち添字として全く異なるものを探さなければならず，そうすると対応関係が分かりづらくなるという弊害もある．添字にプライムをつけるだけでも，”雰囲気で”十分意味が分かるし，そのほうがむしろ簡潔である．そこで慣例的にこのような記法が使われているし，ここでも使うことにする．なお，この記法はなにもベクトルだけでなく一般のテンソルに対しても使うことにする．

補題 2.5.2 の証明． $\boldsymbol{e}^{\mu}$ から $\boldsymbol{e}^{\mu'}$ への変換行列を $M^{\mu'}_{\mu}$ とするとき，

$$\boldsymbol{e}^{\mu'} = M^{\mu'}_{\mu} \boldsymbol{e}^{\mu} \tag{5}$$

が成り立つから，

$$\begin{align} \delta^{\mu'}_{\nu'} =& \langle \boldsymbol{e}^{\mu'},\, \boldsymbol{e}_{\nu'} \rangle \tag{6} \\ =& \langle M^{\mu'}_{\mu} \boldsymbol{e}^{\mu},\, \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} \boldsymbol{e}_{\nu} \rangle \tag{7} \\ =& M^{\mu'}_{\mu} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} \langle \boldsymbol{e}^{\mu},\, \boldsymbol{e}_{\nu} \rangle \tag{8} \\ =& M^{\mu'}_{\mu} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} \delta^{\mu}_{\nu} \tag{9} \\ =& M^{\mu'}_{\nu} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} \tag{10} \end{align}$$

であるが，これは $M^{\mu'}_{\nu}$ が，$\dfrac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}}$ の逆行列であることを意味する．いま，

$$\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} = \delta^{\mu'}_{\nu'} \tag{11}$$

であるから，

$$M^{\mu'}_{\nu} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} \tag{12}$$

である．したがって，

$$\boldsymbol{e}^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \boldsymbol{e}^{\mu} \tag{13}$$

が示された． □

0.2 添字の上げ下げ

双対ベクトル基底とそれに対する演算を定義したが，これは実際の計算をする上で大変便利なつぎの定理を導く．

定理 0.2.1 (添字の上げ下げ)**.**

$$V_{\nu} = g_{\mu\nu} V^{\mu}, \tag{14}$$

$$V^{\nu} = g^{\mu\nu} V_{\mu}, \tag{15}$$

ただし，

$$g^{\mu\nu} = \boldsymbol{e}^{\mu} \cdot \boldsymbol{e}^{\nu} \tag{16}$$

とする．

証明.

$$\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{e}_{\nu} = V^{\mu} \boldsymbol{e}_{\mu} \cdot \boldsymbol{e}_{\nu} = g_{\mu\nu} V^{\mu} \tag{17}$$

一方，

$$\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{e}_{\nu} = (V_{\mu} \boldsymbol{e}^{\mu}) \cdot \boldsymbol{e}_{\nu} = V_{\mu} \langle \boldsymbol{e}^{\mu}, \boldsymbol{e}_{\nu} \rangle = V_{\mu} \delta^{\mu}_{\nu} = V_{\nu} \tag{18}$$

より，

$$V_{\nu} = g_{\mu\nu} V^{\mu} \tag{19}$$

が示せた．もう一つは，添字の上下をすべて反対にすれば証明できる．念のためやってみると，

$$\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{e}^{\nu} = (V_{\mu}\boldsymbol{e}^{\mu}) \cdot \boldsymbol{e}^{\nu} = V_{\mu}\boldsymbol{e}^{\mu} \cdot \boldsymbol{e}^{\nu} = g^{\mu\nu}V_{\mu} \tag{20}$$

一方，

$$\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{e}^{\nu} = (V^{\mu}\boldsymbol{e}_{\mu}) \cdot \boldsymbol{e}^{\nu} = V^{\mu}\langle \boldsymbol{e}^{\nu}, \boldsymbol{e}_{\mu}\rangle = V^{\mu}\delta^{\nu}_{\mu} = V^{\nu} \tag{21}$$

より，

$$V^{\nu} = g^{\mu\nu}V_{\mu} \tag{22}$$

が示せた． □

定理 0.2.2 ($g^{\mu\nu}$ が $g_{\mu\nu}$ の逆行列であること)**.**

$$g^{\mu\sigma}g_{\sigma\nu} = \delta^{\mu}_{\sigma} \tag{23}$$

証明.

$$\begin{aligned}
g^{\mu\sigma}g_{\sigma\nu} =& g^{\mu\sigma}g_{\nu\sigma} && (24)\\
=& \boldsymbol{e}^{\mu} \cdot \boldsymbol{e}^{\sigma} \cdot \boldsymbol{e}_{\nu} \cdot \boldsymbol{e}_{\sigma} && (25)\\
=& \boldsymbol{e}^{\mu} \cdot (\boldsymbol{e}^{\sigma} \cdot \boldsymbol{e}_{\nu}) \cdot \boldsymbol{e}_{\sigma} && (26)\\
=& \boldsymbol{e}^{\mu} \cdot (\delta^{\sigma}_{\nu}) \cdot \boldsymbol{e}_{\sigma} && (27)\\
=& \boldsymbol{e}^{\mu} \cdot \boldsymbol{e}_{\nu} && (28)\\
=& \delta^{\mu}_{\nu} && (29)
\end{aligned}$$

□