0.1　スカラー・反変ベクトル・共変ベクトル

1 章でも述べたとおり，座標変換というのは一般に同一の空間（相対論の場合時空）上の点を異なる座標系から眺めたときに，元の座標系の値たちとどういう関係があるのか？を示したものである．これは，座標変換したい空間上の点を P とするとき，P の O 系での座標を (x^0, x^1, x^2, x^3) とし，O' 系での座標を (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) とすれば，変換公式,

$$x'^\mu = F^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3) \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3) \tag{1}$$

によって表されるものであった．ここで，空間上の点 P は，座標系の選び方によって，当然その座標成分の配列は変わってしまうが，これは座標系の選び方によるもので，座標系を取り替えた場合，座標系の差の分しか変化しない．これは空間上の点という概念は，本来座標とは無縁に存在し得るものであるのに，数学的には仕方なく座標という配列によって指し示している，ということを表している．これは何も空間上の点だけのことではなく，その点で得られる物理量 $\boldsymbol{A}(\mathrm{P})$ もその点で起こっていることが同じという意味で数学的に選んだ座標系とは本質的に無関係に存在する．しかし，実際にこのような空間上の点 P や物理量 $\boldsymbol{A}(\mathrm{P})$ を記述する際には不承不承座標系を導入せざるを得ない．そして，座標系を導入するということは，その座標系での基底を決める必要があり，さらに座標変換をするということは，双方の座標系の基底を変換するということになる．そこで次節からは基底ベクトルの変換について考えてみよう．

0.1.1　基底ベクトルの座標変換の公式

いま，点 P 付近で局所的に定義された 2 つの線形独立な完全系からなる基底 $\{\boldsymbol{e}'_\mu(\mathrm{P})\}$, $\{\boldsymbol{e}_\mu(\mathrm{P})\}$ を考えると，基底の定義より，一方から他方が,

$$\boldsymbol{e}'_\mu(\mathrm{P}) = b^\alpha_\mu(\mathrm{P})\boldsymbol{e}_\alpha(\mathrm{P}) \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3) \tag{2}$$

と表すことができる．物理量は局所的に定義されるものであるから，P から無限小離れた点 Q との差 $d\boldsymbol{x}$ なら，点 P で定義された基底によって展開できる:

$$d\boldsymbol{x} = dx^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha} = dx'^{\mu}\boldsymbol{e}_{\mu} = dx'^{\mu}b^{\alpha}_{\mu}\boldsymbol{e}_{\alpha} \tag{3}$$

ここで,

$$\left(dx'^{\mu}b^{\alpha}_{\mu} - dx^{\alpha}\right)\boldsymbol{e}_{\alpha} = \boldsymbol{0} \tag{4}$$

より，$\boldsymbol{e}_{\alpha}$ が線形独立であることの定義より,

$$dx'^{\mu}b^{\alpha}_{\mu} - dx^{\alpha} = 0, \qquad\qquad (\mu = 0,\, 1,\, 2,\, 3) \tag{5}$$

が成り立つので,

$$dx^{\alpha} = b^{\alpha}_{\mu}dx'^{\mu}, \qquad\qquad (\mu = 0,\, 1,\, 2,\, 3) \tag{6}$$

が得られる．すると全微分の式より,

$$dx^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}dx'^{\mu} \tag{7}$$

が成り立つので，(6) 式から (5) 式を引くと,

$$\left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} - b^{\alpha}_{\mu}\right)dx'^{\mu} = 0 \tag{8}$$

が得られる．これが任意の $\{dx'^{\mu}\}$ たちで成り立つから，結局,

$$b^{\alpha}_{\mu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \tag{9}$$

が成り立つ．これより，(1) 式に戻れば,

$$\boldsymbol{e'}_{\mu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\boldsymbol{e}_{\alpha} \tag{10}$$

という関係式が成り立つことがわかった．これが，座標変換に伴う基底の変換公式である．

0.1.2　反変ベクトルの変換性

次に，物理量が

$$\boldsymbol{A}(\mathrm{P}) = A^{\mu}(\mathrm{P})\boldsymbol{e}_{\mu}(\mathrm{P}) \tag{11}$$

と表されている場合の基底 $\{\boldsymbol{e}^{\mu}\}$ から基底 $\{\boldsymbol{e'}^{\mu}\}$ への変換公式を導こう．これは基底の座標変換の公式を用いれば簡単である:

$$\boldsymbol{A}(\mathrm{P}) = A^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha} = A'^{\alpha}\boldsymbol{e}'_{\alpha} = A'^{\alpha}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\alpha}}\boldsymbol{e}_{\nu} = A'^{\nu}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}}\boldsymbol{e}_{\alpha} \tag{12}$$

これより，

$$A^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}}A'^{\nu} \tag{13}$$

であるので，両辺に $\dfrac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}$ を掛けて縮約を取ると，

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}A^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}}A'^{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}A'^{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}A'^{\nu} = A'^{\mu} \tag{14}$$

より，

$$A'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}A^{\alpha} \tag{15}$$

となることがわかる．これは，ちょうど (9) 式とは係数の分母と分子が反対の逆行列による**反対の変換**なので，A^{μ} のことを**反変ベクトル**と呼ぶ.

0.1.3　スカラー

前節で反変ベクトルの変換を学んだが，座標変換で反変ベクトルのように変換するものや，基底と同じ変換を受けるものがあったが，物理的に重要なのが座標変換で不変の定数となるスカラーである．これは具体例で考えるなら，最も易しいのが固有時であろう．すでに学んだように固有時 $d\tau$ と世界間隔 ds は，どちらも，座標変換で不変な量であった.

0.1.4 共変ベクトルとベクトル・スカラーのまとめ

ここにきて，変換は少なくとも 3 通りあることがわかったので，それらを列挙しよう:

- スカラー・・・・・・座標変換で不変な定数 $S' = S$.
- 反変ベクトル・・・・・・・・・・・・・ $A'^{\mu} = \dfrac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} A^{\alpha}$.
- 共変ベクトル・・・・・・・・・・・・・ $A'_{\mu} = \dfrac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} A_{\alpha}$.

ここで，なんの断りもなく共変ベクトルを導入したが，これは，(9) 式の基底と同じ変換をするものを基底と”同じ”変換式に従うということから，”共変”と呼ぶ習わしになっている．さて，ここまでくれば，あとは一般のテンソルの話に移れる，あとで詳しく説明するが，一般のテンソル $T^{\mu_1 \cdots \mu_n}_{\nu_1 \cdots \nu_m}$ は，反変ベクトル A^{μ_k} $(k = 1, \ldots, n)$，共変ベクトル B_{ν_l} $(l = 1, \ldots, m)$ たちの積

$$A^{\mu_1} \cdots A^{\mu_n} \cdot B_{\nu_1} \cdots B_{\nu_m} \tag{16}$$

たちと一緒の変換をするものとして定義される．このテンソルを，反変 n 階，共変 m 階の混合テンソルと呼ぶ.

0.2 計量テンソルの導入

一般に，座標系を任意に選ぶとは，局所的に基底 $\boldsymbol{e}_\mu$ を設定することであった．そこで時空の 2 点間の微小距離 ds^2 は，一般に，基底同士の内積を,

$$g_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu \tag{17}$$

と置くことにより，

$$ds^2 = d\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{x} = (dx^\mu \boldsymbol{e}_\mu)\cdot(dx^\nu \boldsymbol{e}_\nu) = (\boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu)\,dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{18}$$

と表すことができる．この $g_{\mu\nu}$ を計量 (metric) テンソルと呼ぶ.

計量がテンソルになることはあとで示すとして，ここではまず一般に計量が対称 $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ にとれることに注意しよう．というのも $g_{\mu\nu}$ は，上の式において $dx^\mu dx^\nu$ の係数であり，$g_{\nu\mu}$ は，$dx^\nu dx^\mu$ の係数であるが，$dx^\mu dx^\nu = dx^\nu dx^\mu$ であるから，

$$g_{\mu\nu} \equiv \frac{g_{\mu\nu} + g_{\nu\mu}}{2} \tag{19}$$

と置き直せば，簡単に対称化できるからである．特に，$\{\boldsymbol{e}_\mu\}$ がミンコフスキー時空の基底の場合，

$$\eta_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu \tag{20}$$

をミンコフスキー計量と呼び，このとき，

$$ds^2 = d\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{x} = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{21}$$

が成り立つ．すなわち，$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ である．なお，定義を見れば分かる通り，2 点間の微小距離である世界間隔 ds は，座標変換で不変な量なのでスカラーである.

0.2.1　計量が 2 階の共変テンソルであること

このようにして定義された $g_{\mu\nu}$ は実は 2 階の共変テンソルになっている．そのことを確かめるには次のようにすれば良い.

いま，微小な 2 点を選んでその世界間隔を 2 つの座標系で求めてみれば，

$$ds^2 = {g'}_{\mu\nu}dx'^\mu dx'^\nu = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \tag{22}$$

と 2 通りに表せる．ここで，座標変換は一般に局所的に 1 対 1 対応になっているから逆向きにも取れる．逆向きの座標変換を，

$$x^\alpha = G^\alpha({x'}_0,\, {x'}_1,\, {x'}_2,\, {x'}_3) \qquad (\alpha = 0,\, 1,\, 2,\, 3) \tag{23}$$

と表すとき，この両辺を微分すれば，

$$dx^\alpha = \frac{\partial G^\alpha}{\partial {x'}^\mu} d{x'}^\mu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial {x'}^\mu} d{x'}^\mu \tag{24}$$

が成り立つので，これを (21) 式に代入すれば，

$$ds^2 = {g'}_{\mu\nu} d{x'}^\mu d{x'}^\nu \tag{25}$$

$$= g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \tag{26}$$

$$= g_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial {x'}^\mu} d{x'}^\mu \right) \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial {x'}^\nu} d{x'}^\nu \right) \tag{27}$$

$$= \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial {x'}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial {x'}^\nu} g_{\alpha\beta} \right) d{x'}^\mu d{x'}^\nu \tag{28}$$

これより，

$$\left({g'}_{\mu\nu} - \frac{\partial x^\alpha}{\partial {x'}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial {x'}^\nu} g_{\alpha\beta} \right) d{x'}^\mu d{x'}^\nu = 0 \tag{29}$$

が任意の $d{x'}^\mu d{x'}^\nu$ で成り立つべきなので，

$${g'}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial {x'}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial {x'}^\nu} g_{\alpha\beta} \tag{30}$$

が成り立つことがわかる．これは $g_{\mu\nu}$ が 2 階の共変テンソルであることを示している．さて，ここで，計量は対称になるように選び直したことを覚えているだろうか？対称化した場合でも，きちんとテンソルになっていること

は，次のようにして示せる:

$$
\begin{aligned}
{g'}_{\mu\nu} =& \frac{{G'}_{\mu\nu} + {G'}_{\nu\mu}}{2} &(31)\\
=& \frac{1}{2}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial {x'}^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial {x'}^{\nu}}G_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial {x'}^{\nu}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial {x'}^{\mu}}G_{\beta\alpha} &(32)\\
=& \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial {x'}^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial {x'}^{\nu}}\frac{G_{\alpha\beta} + G_{\beta\alpha}}{2} &(33)\\
=& g_{\alpha\beta} &(34)
\end{aligned}
$$