0.1　ド・ジッター宇宙

1917 年，オランダの天文学者ウィレム・ド・ジッター（Willem de Sitter, 1872〜1934）は，ロバートソン・ウォーカー計量を用いて圧力とエネルギー密度がともに 0 であり正の宇宙項をもつアインシュタイン方程式の厳密解を得た．これは指数関数的に膨張する真空の宇宙のモデルを表しており，ド・ジッター宇宙モデルと呼ばれる．また同様に宇宙定数が負の場合は $k=-1$ の場合に限り解を持ち，こちらは反ド・ジッター宇宙と呼ばれる．この項ではこの 2 つの宇宙の解を紹介する．

0.1.1　ド・ジッター解（$\rho=0,\ p=0,\ \Lambda>0$）の導出

完全流体で満たされた一様等方空間の解として得られる次のフリードマン方程式からスタートする:

フリードマン方程式

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2=\frac{8\pi G}{3c^2}\rho-\frac{k}{a^2}+\frac{\Lambda}{3} \tag{1}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a}=-\frac{4\pi G}{3c^4}\left(\rho c^2+3p\right)+\frac{\Lambda}{3} \tag{2}$$

この 2 つの式において，真空解，即ち $\rho=0,\ p=0$ を仮定する．また宇宙定数 $\Lambda\geq 0$ も仮定する．すると (1)，(2) は，

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2=-\frac{k}{a^2}+\frac{\Lambda}{3} \tag{3}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a}=\frac{\Lambda}{3} \tag{4}$$

となる．まず，(3) より，

$$\dot{a}^2 = -k + \frac{\Lambda}{3}a^2 = \frac{\Lambda}{3}\left(a^2 - k \times \frac{3}{\Lambda}\right) = \frac{\Lambda}{3}\left(a^2 - \frac{3k}{\Lambda}\right)$$

となる．これより，$\alpha \equiv \sqrt{3/\Lambda}$ と置くと，

$$\dot{a} \geq 0 \text{ のとき} \qquad : \int \frac{da}{\sqrt{a^2 - k\alpha^2}} = \frac{c}{\alpha}\int dt, \tag{5}$$

$$\dot{a} \leq 0 \text{ のとき} \qquad : \int -\frac{da}{\sqrt{a^2 - k\alpha^2}} = \frac{c}{\alpha}\int dt \tag{6}$$

が成り立つことになる．これを k の値別に解こう．

$k = 0$ の場合

(5) 式は，

$$\int_{a(0)}^{a(t)} \frac{da}{a} = \frac{c}{\alpha}\int_0^t dt = \frac{c}{\alpha}t$$

より，

$$a(t) = a(0)e^{\frac{c}{\alpha}t}$$

を得る．これは全ての時刻 t で $\dot{a} > 0$ だから，永遠に膨張を続ける宇宙になる．なお (6) 式より得られる時間反転解，$a(t) = a(0)e^{-\frac{c}{\alpha}t}$ も解となる．

$k = +1$ の場合

$$\dot{a}^2 = \frac{1}{\alpha^2}(a^2 - \alpha^2) \tag{7}$$

だから，$\dot{a}^2 \geq 0$ より，任意の時刻で，

$$a(t) \geq \alpha$$

が成り立つ．(7) を微分すると，

$$2\dot{a}\ddot{a} = \frac{1}{\alpha^2} \cdot 2a\dot{a}$$

より，

$$\ddot{a} = \frac{1}{\alpha^2} a > 0$$

が得られるので，関数 $y = a(t)$ の極値は $a(t) = \alpha$ となる時刻のみである．よってこの時刻を $t = 0$ に選べば，

$$a(0) = \alpha,\ \dot{a}(0) = 0$$

である．任意の時刻で $\ddot{a} > 0$ が常に成り立つので，

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad t < 0 \text{ で } \dot{a}(t) < 0 \\ &\text{(ii)} \quad t \geq 0 \text{ で } \dot{a}(t) \geq 0 \end{aligned}$$

が成り立つ．よって $t < 0$ の範囲で (i) より $\dot{a}(t) < 0$ だから，(7) より，

$$0 > \dot{a} = -\frac{1}{\alpha}\sqrt{a^2 - \alpha^2}$$

よって，

$$\int_{a(0)=\alpha}^{a(t)} -\frac{da}{\sqrt{a^2 - \alpha^2}} = \frac{c}{\alpha}\int_0^t dt = \frac{c}{\alpha} t$$

が成り立つ．

一方，$t \geq 0$ の範囲で (ii) より $\dot{a} \geq 0$ だから，(7) より，

$$\int_{a(0)=\alpha}^{a(t)} \frac{da}{\sqrt{a^2 - \alpha^2}} = \frac{c}{\alpha}\int_0^t dt = \frac{c}{\alpha} t$$

が成り立つ．

どちらの場合も，

$$a(t) \equiv \alpha \cosh \theta$$

と置くと,

$$da = \alpha \sinh\theta d\theta,$$
$$\sqrt{a^2 - \alpha^2} = \alpha|\sinh\theta|$$

である．ここで，関係をわかりやすくするために，増減表を書くと，次のようになる:

t	$t<0$	0	$t>0$
$a(t)$	$\searrow$	α	$\nearrow$
$\dot{a}(t)$	$-$	0	$+$
$\ddot{a}(t)$	$+$	$+$	$+$
θ	$\theta<0$	0	$\theta>0$

この表の通り，$t<0$ で $a(t)$ は単調減少だから，このとき $\theta<0$ となる．よって $\sinh\theta<0$ であるので，$t<0$ の範囲で,

$$\begin{aligned}\int_{a(0)=\alpha}^{a(t)} -\frac{da}{\sqrt{a^2-\alpha^2}} &= \int_0^{\theta(t)} -\frac{\alpha\sinh\theta}{\alpha|\sinh\theta|}d\theta \\ &= \int_0^{\theta(t)} d\theta \\ &= \theta(t) \\ &= \cosh^{-1}\left(\frac{a(t)}{\alpha}\right)\end{aligned}$$

が成り立つ．これが,

$$\frac{c}{\alpha}\int_0^t dt = \frac{c}{\alpha}t$$

に等しいので，$t<0$ の範囲で,

$$a(t) = \alpha\cosh\left(\frac{c}{\alpha}t\right)$$

が成り立つ．同様に $t \geq 0$ では，$\sinh\theta \geq 0$ となるので，

$$\begin{aligned}\int_{a(0)=\alpha}^{a(t)} \frac{da}{\sqrt{a^2-\alpha^2}} &= \int_0^{\theta(t)} \frac{\alpha \sinh\theta}{\alpha|\sinh\theta|} d\theta \\ &= \int_0^{\theta(t)} d\theta \\ &= \theta(t) \\ &= \cosh^{-1}\left(\frac{a(t)}{\alpha}\right)\end{aligned}$$

より，$t < 0$ と全く同じ解を得る．結局，任意の t で，

$$a(t) = \alpha \cosh\left(\frac{c}{\alpha} t\right)$$

が成り立つことがわかる．

$k = -1$ の場合

$$\dot{a}^2 = \frac{1}{\alpha^2}(a^2 + \alpha^2) \geq \frac{1}{\alpha^2}\alpha^2 = 1 > 0$$

だから，解は $\dot{a} > 0$ と $\dot{a} < 0$ の 2 つの解に分かれる．どちらの場合も a の最小値は 0 なので，この時の時刻を時間の原点にとろう．すなわち，$a(0) = 0$ ととる．すると，このうち $\dot{a} < 0$ の解は無限の過去 $t = -\infty$ から収縮を始め，$t = 0$ でビッグクランチ $a(0) = 0$ となる解である．この解は，$\dot{a} > 0$ の解の時間反転解であるので，$\dot{a} > 0$ の解を求めよう．この解は $t \geq 0$ に意味を持ち，

$$\dot{a} = \frac{1}{\alpha}\sqrt{a^2 + \alpha^2}$$

より，

$$\int_0^{a(t)} \frac{da}{\sqrt{a^2 - \alpha^2}} = \frac{c}{\alpha}\int_0^t dt = \frac{c}{\alpha} t$$

が成り立つから,

$$a(t) \equiv \alpha \sinh \theta, \qquad (t,\, \theta \geq 0)$$

と置くと,

$$\begin{aligned} da &= \alpha \cosh \theta, \\ \sqrt{a^2 + \alpha^2} &= \alpha \cosh \theta, \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \int_0^{a(t)} \frac{da}{\sqrt{a^2 + \alpha^2}} &= \int_0^{\theta(t)} \frac{\alpha \cosh \theta}{\alpha |\cosh \theta|} d\theta \\ &= \int_0^{\theta(t)} d\theta \\ &= \theta(t) \\ &= \sinh^{-1} \left(\frac{a}{\alpha} \right) \end{aligned}$$

が成り立つ．これが,

$$\frac{c}{\alpha} \int_0^t dt = \frac{c}{\alpha} t$$

に等しいから，$t \geq 0$ で,

$$a(t) = \alpha \sinh \left(\frac{c}{\alpha} t \right)$$

が成り立つことになる.

以上により，ド・ジッター解は，k の値別に,

ド・ジッター解

$$a(t) = \begin{cases} \alpha\cosh\left(\dfrac{c}{\alpha}t\right) & (-\infty \leq t \leq \infty) \qquad k = +1 \qquad (8a) \\ \alpha e^{\frac{c}{\alpha}t} & (-\infty \leq t \leq \infty) \qquad k = 0 \qquad (8b) \\ \alpha\sinh\left(\dfrac{c}{\alpha}t\right) & (0 \leq t) \qquad k = -1 \qquad (8c) \end{cases}$$

ただし，$\alpha = \sqrt{\dfrac{3}{\Lambda}}$

となることがわかった．なお，$k = 0$ の解の係数が $a(0) \to \alpha$ となっているのは，指数関数は時間の原点の取り方を変えれば，自由に係数を調節できるので，ここでも他の解との対称性がわかるように時刻の原点を取り替えて $a(0) = \alpha$ となるように選んだ．

0.1.2　反ド・ジッター解 ($\rho = 0,$, $p = 0,$ $\Lambda < 0$) の導出

ド・ジッター解と同様に，完全流体で満たされた一様等方空間の解として得られる次の方程式からスタートする:

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \tag{9}$$

$$\frac{\ddot a}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^4}\left(\rho c^2 + 3p\right) + \frac{\Lambda}{3} \tag{10}$$

この 2 つの式において，真空解，即ち $\rho = 0$, $p = 0$ を仮定する．またド・ジッター宇宙とは逆に，宇宙定数 $\Lambda \leq 0$ と仮定する．すると (9), (10) は,

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = -\frac{kc^2}{a^2} - \frac{c^2(-\Lambda)}{3}$$

$$\frac{\ddot a}{a} = -\frac{c^2(-\Lambda)}{3}$$

となるので，明らかに $k=-1$ の場合にのみ解を持つ．このとき，

$$\dot{a}^2 = c^2 \frac{(-\Lambda)}{3}\left(\frac{3}{(-\Lambda)} - a^2\right)$$

となるので，$\alpha \equiv \sqrt{3/(-\Lambda)}$ と置くと，

$$\int_{a(0)}^{a(t)} \frac{da}{\sqrt{\alpha^2 - a^2}} = \frac{c}{\alpha}\int_0^t dt = \frac{c}{\alpha}t$$

を得る．そこで $a(t) \equiv \alpha \sin\theta$ と置くと，

$$\begin{aligned} da &= \alpha\cos\theta, \\ \sqrt{\alpha^2 - a^2} &= \alpha\cos\theta \end{aligned}$$

となるので，

$$\int_{a(0)}^{a(t)} \frac{da}{\sqrt{\alpha^2 - a^2}} = \left[\sin^{-1}\left(\frac{a}{\alpha}\right)\right]_{a(0)}^{a(t)} = \sin^{-1}\left(\frac{a(t)}{\alpha}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{a(0)}{\alpha}\right)$$

より，

$$a(t) = \alpha\sin\left(\frac{c}{\alpha}t + \sin^{-1}\left(\frac{a(0)}{\alpha}\right)\right)$$

が得られるので，$a(0)=0$ を仮定すると，

$$a(t) = \alpha\sin\left(\frac{c}{\alpha}t\right)$$

が得られる．