いくつかの恒等式

　リーマンテンソルに関してはいくつもの恒等式が存在する．まず最初にリーマンテンソルの定義式を書いてみよう．

$$R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} \overset{\mathrm{def}}{=} \partial_\beta \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\beta} - \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\gamma}$$

これより，

$$\begin{aligned}
R^{\mu}{}_{\alpha\gamma\beta} &= \partial_\gamma \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} - \partial_\beta \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma} + \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\gamma} - \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\beta} \\
&= -\left(\partial_\beta \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\beta} - \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\gamma}\right) \\
&= -R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}
\end{aligned}$$

$$\therefore R^{\mu}{}_{\alpha\gamma\beta} = -R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} \tag{1}$$

また，$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}$ に注意すると，

$$R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} = \overset{1}{\partial_\beta \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma}} - \overset{2}{\partial_\gamma \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}} + \overset{3}{\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\beta}} - \overset{4}{\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\gamma}}$$

$$R^{\mu}{}_{\gamma\alpha\beta} = \overset{2}{\partial_\gamma \Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha}} - \overset{5}{\partial_\alpha \Gamma^{\mu}{}_{\beta\gamma}} + \overset{4}{\Gamma^{\lambda}{}_{\beta\alpha}\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\gamma}} - \overset{6}{\Gamma^{\lambda}{}_{\beta\gamma}\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\alpha}}$$

$$R^{\mu}{}_{\beta\gamma\alpha} = \overset{5}{\partial_\alpha \Gamma^{\mu}{}_{\gamma\beta}} - \overset{1}{\partial_\beta \Gamma^{\mu}{}_{\gamma\alpha}} + \overset{6}{\Gamma^{\lambda}{}_{\gamma\beta}\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\alpha}} - \overset{3}{\Gamma^{\lambda}{}_{\gamma\alpha}\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\beta}}$$

より，

$$R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} + R^{\mu}{}_{\gamma\alpha\beta} + R^{\mu}{}_{\beta\gamma\alpha} = 0 \tag{2}$$

が得られる．リーマンテンソルの対称性をより深く調べるために，共変成分，

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\mu} R^{\mu}{}_{\beta\gamma\delta}$$

を考えよう．これは定義に従って書き下すと次のようになる．

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\mu}\left(\partial_\gamma \Gamma^{\mu}{}_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^{\mu}{}_{\beta\gamma} + \Gamma^{\nu}{}_{\beta\delta}\Gamma^{\mu}{}_{\nu\gamma} - \Gamma^{\nu}{}_{\beta\gamma}\Gamma^{\mu}{}_{\nu\delta}\right)$$

ここで特に座標系として測地線座標を選ぼう．するとこの座標系のこの点付近では空間が平坦となり，接続係数 $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ は全て 0 となることになるので，

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= g_{\alpha\mu}\left(\partial_\gamma \Gamma^{\mu}{}_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^{\mu}{}_{\beta\gamma}\right) \\
&= g_{\alpha\mu}\left\{\partial_\gamma\left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\delta} + \frac{\partial g_{\nu\delta}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x^\nu}\right)\right] - \partial_\delta\left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\nu\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\nu}\right)\right]\right\} \\
&= \frac{1}{2}g_{\alpha\mu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\gamma}\left(\frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\delta} + \frac{\partial g_{\nu\delta}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x^\nu}\right) + \frac{1}{2}g_{\alpha\mu}g^{\mu\nu}\left(\cancel{\frac{\partial^2 g_{\nu\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\delta}} + \frac{\partial^2 g_{\nu\delta}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} - \frac{\partial^2 g_{\delta\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\nu}\right) \\
&\quad - \frac{1}{2}g_{\alpha\mu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\delta}\left(\frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\nu\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\nu}\right) - \frac{1}{2}g_{\alpha\mu}g^{\mu\nu}\left(\cancel{\frac{\partial^2 g_{\nu\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\delta}} + \frac{\partial^2 g_{\nu\gamma}}{\partial x^\beta \partial x^\delta} - \frac{\partial^2 g_{\gamma\beta}}{\partial x^\delta \partial x^\nu}\right)
\end{aligned}$$

ここで，我々の選んだ座標系では，局所的に平坦なのだから計量の 1 階微分は 0 になる．故に $\dfrac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\gamma}$ も $\dfrac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\delta}$ も共に 0 となるから，結局，

$$
\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \frac{1}{2} g_{\alpha\mu} g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 g_{\nu\delta}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} - \frac{\partial^2 g_{\delta\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\nu} \right) - \frac{1}{2} g_{\alpha\mu} g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 g_{\nu\gamma}}{\partial x^\beta \partial x^\delta} - \frac{\partial^2 g_{\gamma\beta}}{\partial x^\delta \partial x^\nu} \right) \\
&= \frac{1}{2} \delta_\alpha{}^\nu \left(\frac{\partial^2 g_{\nu\delta}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} - \frac{\partial^2 g_{\delta\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\nu} \right) - \frac{1}{2} \delta_\alpha{}^\nu \left(\frac{\partial^2 g_{\nu\gamma}}{\partial x^\beta \partial x^\delta} - \frac{\partial^2 g_{\gamma\beta}}{\partial x^\delta \partial x^\nu} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\delta}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} - \frac{\partial^2 g_{\delta\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta \partial x^\delta} - \frac{\partial^2 g_{\gamma\beta}}{\partial x^\delta \partial x^\alpha} \right)
\end{aligned}
$$

より，

$$
R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\delta}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha \partial x^\delta} - \frac{\partial^2 g_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta \partial x^\delta} \right) \tag{3}
$$

となることが分かる．但し見やすいように計量の対称性 $g_{\beta\alpha} = g_{\alpha\beta}$ 及び，偏微分の順序の交換 $\dfrac{\partial^2}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$ を用いてアルファベット順になるように整理した．これより，

$$
R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}
$$

となることが (3) 式に各添字を代入する事によって分かる．また，

$$
\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \frac{1}{2} \left(\cancelto{1}{\frac{\partial^2 g_{\alpha\delta}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}} + \cancelto{2}{\frac{\partial^2 g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha \partial x^\delta}} - \cancelto{3}{\frac{\partial^2 g_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma}} - \cancelto{4}{\frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta \partial x^\delta}} \right) \\
R_{\alpha\delta\beta\gamma} &= \frac{1}{2} \left(\cancelto{4}{\frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\delta \partial x^\beta}} + \cancelto{3}{\frac{\partial^2 g_{\delta\beta}}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma}} - \cancelto{5}{\frac{\partial^2 g_{\delta\gamma}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}} - \cancelto{6}{\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\delta \partial x^\gamma}} \right) \\
R_{\alpha\gamma\delta\beta} &= \frac{1}{2} \left(\cancelto{6}{\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\delta}} + \cancelto{5}{\frac{\partial^2 g_{\gamma\delta}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}} - \cancelto{2}{\frac{\partial^2 g_{\gamma\beta}}{\partial x^\alpha \partial x^\delta}} - \cancelto{1}{\frac{\partial^2 g_{\alpha\delta}}{\partial x^\gamma \partial x^\beta}} \right)
\end{aligned}
$$

より，

$$
R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} = 0 \tag{4}
$$

も成り立つ事が分かる．さて我々は座標系として測地座標を選んで上の関係式を導いたのであるが，$R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ がテンソルである事より，この関係式は任意の座標系の選び方に対して成り立つ関係式となっている．例えば最後の式の左辺はテンソル 3 つの和になっているから左辺はテンソルになり，右辺が 0 であるからこのテンソルはどのような座標系の選び方に対しても 0 となり，即ちどのような座標系を選んでも成り立つ関係式である事が分かる．