リーマンテンソルの定義

通常，2 階微分可能な関数は 2 つある変数のうちどちらから偏微分しても得られる結果は同じになるが，共変微分の場合はこれとは異なる．そこでまずそれを示そう．

$$\nabla_\beta \boldsymbol{A} = \nabla_\beta \left(A^\mu \boldsymbol{e}_\mu\right) = A^\mu{}_{,\beta} \boldsymbol{e}_\mu + A^\mu \left(\Gamma^\nu{}_{\mu\beta} \boldsymbol{e}_\nu\right) = A^\mu{}_{,\beta} \boldsymbol{e}_\mu + A^\nu \Gamma^\mu{}_{\nu\beta} \boldsymbol{e}_\mu$$

だから，

$$\begin{aligned}
\nabla_\alpha \left(\nabla_\beta \boldsymbol{A}\right) &= \nabla_\alpha \left(A^\mu{}_{,\beta} \boldsymbol{e}_\mu + A^\nu \Gamma^\mu{}_{\nu\beta} \boldsymbol{e}_\mu\right) \\
&= A^\mu{}_{,\alpha\beta} \boldsymbol{e}_\mu + A^\mu{}_{,\beta} \left(\Gamma^\nu{}_{\mu\alpha} \boldsymbol{e}_\nu\right) + A^\nu{}_{,\alpha} \Gamma^\mu{}_{\nu\beta} \boldsymbol{e}_\mu + A^\nu \Gamma^\mu{}_{\nu\beta,\alpha} \boldsymbol{e}_\mu + A^\nu \Gamma^\mu{}_{\nu\beta} \left(\Gamma^\lambda{}_{\mu\alpha} \boldsymbol{e}_\lambda\right) \\
&= A^\mu{}_{,\alpha\beta} \boldsymbol{e}_\mu + A^\nu{}_{,\beta} \Gamma^\mu{}_{\nu\alpha} \boldsymbol{e}_\mu + A^\nu{}_{,\alpha} \Gamma^\mu{}_{\nu\beta} \boldsymbol{e}_\mu + A^\nu \Gamma^\mu{}_{\nu\beta,\alpha} \boldsymbol{e}_\mu + A^\nu \Gamma^\lambda{}_{\nu\beta} \Gamma^\mu{}_{\lambda\alpha} \boldsymbol{e}_\mu
\end{aligned}$$

が得られる．一方添字の α と β を入れ替えると，

$$\nabla_\beta \left(\nabla_\alpha \boldsymbol{A}\right) = A^\mu{}_{,\alpha\beta} \boldsymbol{e}_\mu + A^\nu{}_{,\alpha} \Gamma^\mu{}_{\nu\beta} \boldsymbol{e}_\mu + A^\nu{}_{,\beta} \Gamma^\mu{}_{\nu\alpha} \boldsymbol{e}_\mu + A^\nu \Gamma^\mu{}_{\nu\alpha,\beta} \boldsymbol{e}_\mu + A^\nu \Gamma^\lambda{}_{\nu\alpha} \Gamma^\mu{}_{\lambda\beta} \boldsymbol{e}_\mu$$

が得られるので両者の差を取ると，

$$\begin{aligned}
\nabla_\alpha \left(\nabla_\beta \boldsymbol{A}\right) &= \cancel{A^\mu{}_{,\alpha\beta} \boldsymbol{e}_\mu} + \cancel{A^\nu{}_{,\beta} \Gamma^\mu{}_{\nu\alpha} \boldsymbol{e}_\mu} + \cancel{A^\nu{}_{,\alpha} \Gamma^\mu{}_{\nu\beta} \boldsymbol{e}_\mu} + A^\nu \Gamma^\mu{}_{\nu\beta,\alpha} \boldsymbol{e}_\mu + A^\nu \Gamma^\lambda{}_{\nu\beta} \Gamma^\mu{}_{\lambda\alpha} \boldsymbol{e}_\mu \\
\nabla_\beta \left(\nabla_\alpha \boldsymbol{A}\right) &= \cancel{A^\mu{}_{,\alpha\beta} \boldsymbol{e}_\mu} + \cancel{A^\nu{}_{,\alpha} \Gamma^\mu{}_{\nu\beta} \boldsymbol{e}_\mu} + \cancel{A^\nu{}_{,\beta} \Gamma^\mu{}_{\nu\alpha} \boldsymbol{e}_\mu} + A^\nu \Gamma^\mu{}_{\nu\alpha,\beta} \boldsymbol{e}_\mu + A^\nu \Gamma^\lambda{}_{\nu\alpha} \Gamma^\mu{}_{\lambda\beta} \boldsymbol{e}_\mu
\end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned}
\left[\nabla_\alpha, \nabla_\beta\right] \boldsymbol{A} &\overset{\text{def}}{=} \nabla_\alpha \left(\nabla_\beta \boldsymbol{A}\right) - \nabla_\beta \left(\nabla_\alpha \boldsymbol{A}\right) \\
&= A^\nu \Gamma^\mu{}_{\nu\beta,\alpha} \boldsymbol{e}_\mu - A^\nu \Gamma^\mu{}_{\nu\alpha,\beta} \boldsymbol{e}_\mu + A^\nu \Gamma^\lambda{}_{\nu\beta} \Gamma^\mu{}_{\lambda\alpha} \boldsymbol{e}_\mu - A^\nu \Gamma^\lambda{}_{\nu\alpha} \Gamma^\mu{}_{\lambda\beta} \boldsymbol{e}_\mu \\
&= \left(\partial_\alpha \Gamma^\mu{}_{\nu\beta} - \partial_\beta \Gamma^\mu{}_{\nu\alpha} + \Gamma^\lambda{}_{\nu\beta} \Gamma^\mu{}_{\lambda\alpha} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\alpha} \Gamma^\mu{}_{\lambda\beta}\right) A^\nu \boldsymbol{e}_\mu
\end{aligned}$$

が得られる．ここで，

$$R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} \overset{\text{def}}{=} \partial_\alpha \Gamma^\mu{}_{\nu\beta} - \partial_\beta \Gamma^\mu{}_{\nu\alpha} + \Gamma^\lambda{}_{\nu\beta} \Gamma^\mu{}_{\lambda\alpha} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\alpha} \Gamma^\mu{}_{\lambda\beta}$$

とおくと，

$$\left[\nabla_\alpha, \nabla_\beta\right] \boldsymbol{A} = R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} A^\nu \boldsymbol{e}_\mu \tag{1}$$

となり，左辺は 2 階の共変テンソルであり，右辺の $A^\nu \boldsymbol{e}_\mu$ の部分は 2 階の混合テンソルだから，$R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$ もテンソルである事が分かる．この $R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$ をリーマンテンソル或いはリーマンの曲率テンソルと呼ぶ．（曲率テンソルと呼ぶ理由は後述する.）ひとたび $R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$ がテンソルと分かってしまえば，この量が座標系の選び方に依存しない意味を持つ事になる．具体的には，ある座標系を選んだときにリーマンテンソルの全ての成分が 0 だとするなら，どのような座標系を選んだとしても常にリーマンテンソルの全ての成分は 0 になる．さらにそのような座標系においては常に接続係数 $\Gamma^\mu{}_{\nu\alpha}$ の全ての成分が 0 になり，従ってそのような空間は平坦な空間，つまりミンコフスキー空間のようなものに限られる事も示せる．