計量条件の導出

ここでは，計量条件と呼ばれる式を導く．これは計量の共変微分が 0，すなわち $\nabla_\beta g_{\mu\nu}=0$ を示す．

準備〜2 階の共変テンソルの共変微分〜

さて，前節では一般のテンソルの共変微分を導いたわけだが，計算が煩雑な上に覚えるのも大変だろう．そこでここでは，具体的なイメージを掴むために, 計量条件，すなわち $\nabla_\beta g_{\mu\nu}=0$ を導く準備として，2 階の共変テンソルの共変微分を導きたい．もちろん，ここでの議論は全く同じやり方で任意の混合テンソルに拡張でき，それが前節で導いたものであった．要は難しいほうを先に導いてしまったので，より簡単な例を示そうという事である．

補題 0.1. 2 階の共変テンソルの共変微分
$T_{\mu\nu}$ を 2 階の共変テンソルとするとき，次が成り立つ．

$$T_{\mu\nu;\beta}=T_{\mu\nu,\beta}-\mathit{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\beta}T_{\alpha\nu}-\mathit{\Gamma}^{\alpha}{}_{\nu\beta}T_{\mu\alpha}$$

証明. 前節同様に基底をつけて証明する．

$$\begin{aligned}
\nabla_\beta\left(T_{\mu\nu}\boldsymbol{w}^\mu\otimes\boldsymbol{w}^\nu\right)&=\left(\nabla_\beta T_{\mu\nu}\right)\boldsymbol{w}^\mu\otimes\boldsymbol{w}^\nu+T_{\mu\nu}\left(\nabla_\beta\boldsymbol{w}^\mu\right)\otimes\boldsymbol{w}^\nu+T_{\mu\nu}\boldsymbol{w}^\mu\otimes\left(\nabla_\beta\boldsymbol{w}^\nu\right)\\
&=T_{\mu\nu,\beta}\boldsymbol{w}^\mu\otimes\boldsymbol{w}^\nu+T_{\mu\nu}\left(-\mathit{\Gamma}^{\mu}{}_{\alpha\beta}\boldsymbol{w}^\alpha\right)\otimes\boldsymbol{w}^\nu+T_{\mu\nu}\boldsymbol{w}^\mu\otimes\left(-\mathit{\Gamma}^{\nu}{}_{\alpha\beta}\boldsymbol{w}^\alpha\right)\\
&=T_{\mu\nu,\beta}\boldsymbol{w}^\mu\otimes\boldsymbol{w}^\nu-\mathit{\Gamma}^{\mu}{}_{\alpha\beta}T_{\mu\nu}\boldsymbol{w}^\alpha\otimes\boldsymbol{w}^\nu-\mathit{\Gamma}^{\nu}{}_{\alpha\beta}T_{\mu\nu}\boldsymbol{w}^\mu\otimes\boldsymbol{w}^\alpha\\
&=T_{\mu\nu,\beta}\boldsymbol{w}^\mu\otimes\boldsymbol{w}^\nu-\mathit{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\beta}T_{\alpha\nu}\boldsymbol{w}^\mu\otimes\boldsymbol{w}^\nu-\mathit{\Gamma}^{\alpha}{}_{\nu\beta}T_{\mu\alpha}\boldsymbol{w}^\mu\otimes\boldsymbol{w}^\nu\\
&=\left(T_{\mu\nu,\beta}-\mathit{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\beta}T_{\alpha\nu}-\mathit{\Gamma}^{\alpha}{}_{\nu\beta}T_{\mu\alpha}\right)\boldsymbol{w}^\mu\otimes\boldsymbol{w}^\nu
\end{aligned}$$

よって成分を取り出すと，

$$T_{\mu\nu;\beta}\overset{\text{def}}{=}\nabla_\beta T_{\mu\nu}=T_{\mu\nu,\beta}-\mathit{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\beta}T_{\alpha\nu}-\mathit{\Gamma}^{\alpha}{}_{\nu\beta}T_{\mu\alpha}$$

が示された． □

計量条件の導出

計量条件を導くに当たって，次の事実を用いる．

1. $T_{\mu\nu;\beta}=T_{\mu\nu,\beta}-\mathit{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\beta}T_{\alpha\nu}-\mathit{\Gamma}^{\alpha}{}_{\nu\beta}T_{\mu\alpha}$ (2 階の共変テンソルの共変微分)
2. 計量 $g_{\mu\nu}$ は 2 階の共変テンソルである．
3. $g_{\nu\mu}=g_{\mu\nu}$(計量テンソルは対称 (行列) である．)
4. 接続係数 $\mathit{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ は計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を用いて次のように表される．
   $\mathit{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta\gamma}=\dfrac{1}{2}g^{\alpha\kappa}\left(g_{\kappa\beta,\gamma}+g_{\kappa\gamma,\beta}-g_{\gamma\beta,\kappa}\right)$

定理 0.2. 計量条件

$$\nabla_\beta g_{\mu\nu} = 0, \qquad \nabla_\beta g^{\mu\nu} = 0$$

証明.

$$\begin{aligned}
\nabla_\beta g_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu,\beta} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} g_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\nu\beta} g_{\mu\alpha} \\
&= g_{\mu\nu,\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\kappa} \left(g_{\kappa\mu,\beta} + g_{\kappa\beta,\mu} - g_{\beta\mu,\kappa}\right) g_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} g^{\alpha\kappa} \left(g_{\kappa\nu,\beta} + g_{\kappa\beta,\nu} - g_{\beta\nu,\kappa}\right) g_{\mu\alpha} \\
&= g_{\mu\nu,\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\nu} g^{\alpha\kappa} \left(g_{\kappa\mu,\beta} + g_{\kappa\beta,\mu} - g_{\beta\mu,\kappa}\right) - \frac{1}{2} g_{\mu\alpha} g^{\alpha\kappa} \left(g_{\kappa\nu,\beta} + g_{\kappa\beta,\nu} - g_{\beta\nu,\kappa}\right) \\
&= g_{\mu\nu,\beta} - \frac{1}{2} \delta_\nu{}^\kappa \left(g_{\kappa\mu,\beta} + g_{\kappa\beta,\mu} - g_{\beta\mu,\kappa}\right) - \frac{1}{2} \delta_\mu{}^\kappa \left(g_{\kappa\nu,\beta} + g_{\kappa\beta,\nu} - g_{\beta\nu,\kappa}\right) \\
&= g_{\mu\nu,\beta} - \frac{1}{2} \left(g_{\nu\mu,\beta} + g_{\nu\beta,\mu} - g_{\beta\mu,\nu}\right) - \frac{1}{2} \left(g_{\mu\nu,\beta} + g_{\mu\beta,\nu} - g_{\beta\nu,\mu}\right) \\
&= g_{\mu\nu,\beta} - \frac{1}{2} \left(g_{\mu\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\beta,\nu}\right) - \frac{1}{2} \left(g_{\mu\nu,\beta} + g_{\mu\beta,\nu} - g_{\beta\nu,\mu}\right) \\
&= 0 \\
\therefore \nabla_\beta g_{\mu\nu} &= 0
\end{aligned}$$

$\nabla_\beta g^{\mu\nu}$ は次のようにして示される．いま，

$$g_{\kappa\lambda} g^{\lambda\nu} = \delta_\kappa{}^\nu$$

だから，

$$\nabla_\beta \left(g_{\kappa\lambda} g^{\lambda\nu}\right) = \nabla_\beta \delta_\kappa{}^\nu = 0$$

また，先ほどの証明より，$\nabla_\beta g_{\kappa\lambda} = 0$ だから，

$$\nabla_\beta \left(g_{\kappa\lambda} g^{\lambda\nu}\right) = \left(\nabla_\beta g_{\kappa\lambda}\right) g^{\lambda\nu} + g_{\kappa\lambda} \left(\nabla_\beta g^{\lambda\nu}\right) = g_{\kappa\lambda} \left(\nabla_\beta g^{\lambda\nu}\right) = 0$$

よって最後の式に $g^{\mu\kappa}$ を掛けて和を取ると，

$$g^{\mu\kappa} g_{\kappa\lambda} \left(\nabla_\beta g^{\lambda\nu}\right) = \delta^\mu{}_\lambda \left(\nabla_\beta g^{\lambda\nu}\right) = \nabla_\beta g^{\mu\nu} = 0$$

よって，$\nabla_\beta g^{\mu\nu} = 0$ が示された． □