テンソルの共変微分を定義する

さて，我々はベクトルの基底も含めて微分する，ということによって共変微分を定義した．これは成分だけ取り出して考えれば，反変ベクトルの共変微分を得た事になる．それでは一般にテンソルの共変微分 (従って共変ベクトルの共変微分も含む) はどうなるのであろうか？ このことを分かり易く理解するため，テンソル空間を導入する．これはベクトルの成分だけを取り出して，反変ベクトルの共変微分を定義するより，ベクトル空間を考えて，基底まで含めて微分したほうが意味合いがはっきりすることに対応する．

双対ベクトル基底の導入

定義 0.1. 双対ベクトル基底
次の定義式を満たす $\boldsymbol{w}^\mu$ を基底 $\boldsymbol{e}_\mu$ に対応する「双対ベクトル基底」と呼ぶ．

$$\left\langle \boldsymbol{w}^\mu,\ \boldsymbol{e}_\nu \right\rangle = \delta^\mu{}_\nu$$

なお，"$\left\langle *,\ * \right\rangle$"は，双対ベクトルとベクトルの積（のようなもの）の演算を表すものとする．

補題 0.2. 双対ベクトル基底の一般座標変換
基底 $\boldsymbol{e}_\mu$ が，

$$\boldsymbol{e}_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \boldsymbol{e}_\mu$$

と座標変換されるとき，双対ベクトル基底 $\boldsymbol{w}^\mu$ は，

$$\boldsymbol{w}^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \boldsymbol{w}^\mu$$

のように座標変換される．

上の記号法についての注意

注意深い方はお気付きと思うが，上の表記法はちょっと変である．

$$\boldsymbol{e}_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \boldsymbol{e}_\mu$$

において $\boldsymbol{e}_\mu \to \boldsymbol{e}_{\mu'}$ という変換を行っているわけだが，本来の意味で考えればこれは左辺と右辺の添字だけ変わっているのだから，全く同じものか，せいぜい同じ基底の組の別成分を表しているとしかならないはずである．しかしもちろん上の式はそういう意味を示しているわけではない．正しく書けば，

$$\boldsymbol{e}'{}_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} \boldsymbol{e}_\mu \tag{*}$$

となり，座標系が x から x'，基底の組が $\boldsymbol{e}^\mu$ から $\boldsymbol{e}'^{\mu'}$ に変わっていることを表している．しかし (*) はあまりに煩雑である． かといって，

$$\boldsymbol{e}'{}_{\mu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu}} \boldsymbol{e}_\mu$$

と書くわけにもいかない．その場合，いちいち添字として全く異なるものを探さなければならず，そうすると対応関係が分かりづらくなるという弊害もある．添字にダッシュをつけるだけでも，"雰囲気で" 十分意味が分かるし，そのほうがむしろ簡潔である．そこで慣例的にこのような記法が使われているし，ここでも使うことにする．なお，この記法はなにもベクトルだけでなく一般のテンソルに対しても使うにする．

定義 0.3. テンソルの定義
基底の組，$(\boldsymbol{e}_{\mu_1}, \cdots, \boldsymbol{e}_{\mu_m}, \boldsymbol{w}^{\nu_1}, \cdots, \boldsymbol{w}^{\nu_n})$ に $T^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\cdots\nu_n}$ が対応するとき，

$$\boldsymbol{T} = T^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\cdots\nu_n} \boldsymbol{e}_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{\mu_m} \boldsymbol{w}^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{w}^{\nu_n}$$

と表現したものを $(m,\ n)$ 混合テンソルと呼び，$T^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\cdots\nu_n}$ をその成分と呼ぶ．

定理 0.4. テンソルの一般座標変換
上で定義したテンソルに対し，その座標変換は,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T} &= T^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\cdots\nu_n}\boldsymbol{e}_{\mu_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{\mu_m}\boldsymbol{w}^{\nu_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{w}^{\nu_n} \\
&= \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\mu'_m}}{\partial x^{\mu_m}}\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}}\cdots\frac{\partial x^{\nu_n}}{\partial x^{\nu'_n}}T^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\cdots\nu_n}\boldsymbol{e}_{\mu'_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{\mu'_m}\boldsymbol{w}^{\nu'_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{w}^{\nu'_n} \\
&= T^{\mu'_1\cdots\mu'_m}{}_{\nu'_1\cdots\nu'_n}\boldsymbol{e}_{\mu'_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{\mu'_m}\boldsymbol{w}^{\nu'_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{w}^{\nu'_n}
\end{aligned}$$

と表される．これは成分だけ取り出して書き出せば,

$$T^{\mu'_1\cdots\mu'_m}{}_{\nu'_1\cdots\nu'_n} = \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\mu'_m}}{\partial x^{\mu_m}}\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}}\cdots\frac{\partial x^{\nu_n}}{\partial x^{\nu'_n}}T^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\cdots\nu_n}$$

となり通常混合テンソルの変換則として良く知られた式になっている．

さて，テンソルの定義, 変換則が与えられたところで，一般のテンソルに対する共変微分をどう定義するのかについて考えたい．共変微分の概念を一般のテンソルに対して拡張するために，ここではごく自然な条件を要請しよう．

1. スカラーの共変微分は通常の偏微分に等しい．$\nabla_\beta S = \dfrac{\partial S}{\partial x^\beta}$
2. $\langle *,\, * \rangle$ の演算に対する共変微分がライプニッツ則を満たす．$\nabla_\beta\langle *,\, *\rangle = \langle \nabla_\beta *,\, *\rangle + \langle *,\, \nabla_\beta *\rangle$

補題 0.5. 双対ベクトル基底の共変微分
$\boldsymbol{w}^\mu$ を $\boldsymbol{e}^\mu$ に対する双対ベクトル基底とするとき，次が成り立つ:

$$\nabla_\beta \boldsymbol{w}^\mu = -\Gamma^\mu{}_{\nu\beta}\boldsymbol{w}^\nu$$

証明. 双対ベクトル基底の定義より,

$$\langle \boldsymbol{w}^\mu,\, \boldsymbol{e}_\nu\rangle = \delta^\mu{}_\nu$$

この式の右辺はスカラーで特に定数であるから，条件 1 より共変微分をすると 0 になる．また左辺は条件 2 より共変微分に対してライプニッツ則が成り立つから,

$$\begin{aligned}
\nabla_\beta\langle \boldsymbol{w}^\mu,\, \boldsymbol{e}_\nu\rangle &= \langle \nabla_\beta \boldsymbol{w}^\mu,\, \boldsymbol{e}_\nu\rangle + \langle \boldsymbol{w}^\mu,\, \nabla_\beta \boldsymbol{e}_\nu\rangle \\
&= \langle \nabla_\beta \boldsymbol{w}^\mu,\, \boldsymbol{e}_\nu\rangle + \langle \boldsymbol{w}^\mu,\, \rangle \\
&= \langle \nabla_\beta \boldsymbol{w}^\mu,\, \boldsymbol{e}_\nu\rangle + \Gamma^\alpha{}_{\nu\beta}\langle \boldsymbol{w}^\mu,\, \boldsymbol{e}_\alpha\rangle \\
&= \langle \nabla_\beta \boldsymbol{w}^\mu,\, \boldsymbol{e}_\nu\rangle + \Gamma^\alpha{}_{\nu\beta}\delta^\mu{}_\alpha \\
&= \langle \nabla_\beta \boldsymbol{w}^\mu,\, \boldsymbol{e}_\nu\rangle + \Gamma^\mu{}_{\nu\beta}
\end{aligned}$$

ここで，$\nabla_\beta \boldsymbol{w}^\mu = w_\alpha \boldsymbol{w}^\alpha$ と置くと,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_\beta \boldsymbol{w}^\mu,\, \boldsymbol{e}_\nu\rangle + \Gamma^\mu{}_{\nu\beta} &= \langle w_\alpha \boldsymbol{w}^\alpha,\, \boldsymbol{e}_\nu\rangle + \Gamma^\mu{}_{\nu\beta} \\
&= w_\alpha\langle \boldsymbol{w}^\alpha,\, \boldsymbol{e}_\nu\rangle + \Gamma^\mu{}_{\nu\beta} \\
&= w_\alpha\delta^\alpha{}_\nu + \Gamma^\mu{}_{\nu\beta} \\
&= w_\nu + \Gamma^\mu{}_{\nu\beta} \\
&= 0
\end{aligned}$$

より，$w_\nu = -\Gamma^\mu{}_{\nu\beta}$ が得られる．従って,

$$\nabla_\beta \boldsymbol{w}^\mu = -\Gamma^\mu{}_{\nu\beta}\boldsymbol{w}^\nu$$

が示された． □

さて以上により，一般のテンソルの共変微分を定義する準備が整った．我々はいま，

1. スカラー S に対しては，$\nabla_\beta S = \dfrac{\partial S}{\partial x^\beta} = S_{\ ,\beta}$
2. ベクトル基底 $\boldsymbol{e}_\mu$ に対しては，$\nabla_\beta \boldsymbol{e}_\mu = \mathit{\Gamma}^\alpha_{\ \ \mu\beta}\boldsymbol{e}_\alpha$
3. 双対ベクトル基底 $\boldsymbol{w}^\mu$ に対しては，$\nabla_\beta \boldsymbol{w}^\mu = -\mathit{\Gamma}^\mu_{\ \ \nu\beta}\boldsymbol{w}^\nu$

の 3 つの共変微分を得たわけだが，テンソルの定義を見れば分かるようにテンソルは上記 3 つの成分の積だけで構成されている．従って，一般のテンソルに対する共変微分は単にライプニッツ則を適用して各成分ごとに共変微分を行えばよいことになる．以上のことをそのまま行うと次の式が導かれる．

定理 0.6.

$$
\begin{aligned}
T^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_n;\gamma} &\overset{\mathrm{def}}{=} \nabla_\gamma T^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_n} \\
&= T^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_n,\gamma} + \sum_{i=1}^{m} \mathit{\Gamma}^{\alpha_i}{}_{\mu\gamma} T^{\alpha_1\cdots\alpha_{i-1}\mu\alpha_{i+1}\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_n} - \sum_{i=1}^{m} \mathit{\Gamma}^{\mu}{}_{\beta_j\gamma} T^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_{j-1}\mu\beta_{j+1}\cdots\beta_n}
\end{aligned}
$$

証明.

$$
\boldsymbol{T} \overset{\mathrm{def}}{=} T^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_n}\boldsymbol{e}_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{\alpha_m}\boldsymbol{w}^{\beta_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}^{\beta_n}
$$

とおき，この $\boldsymbol{T}$ を共変微分すると，

$$
\begin{aligned}
\nabla_\gamma \boldsymbol{T} &= \nabla_\gamma\left(T^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_n}\boldsymbol{e}_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{\alpha_m}\otimes\boldsymbol{w}^{\beta_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}^{\beta_n}\right) \\
&= \left(\nabla_\gamma T^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_n}\right)\boldsymbol{e}_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{\alpha_m}\otimes\boldsymbol{w}^{\beta_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{w}^{\beta_n} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m} T^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_n}\boldsymbol{e}_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{\alpha_{i-1}}\otimes\nabla_\gamma\boldsymbol{e}_{\alpha_i}\otimes\boldsymbol{e}_{\alpha_{i+1}}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{\alpha_m}\otimes\boldsymbol{w}^{\beta_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}^{\beta_n} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n} T^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_n}\boldsymbol{e}_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{\alpha_m}\otimes\boldsymbol{w}^{\beta_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{w}^{\beta_{j-1}}\otimes\nabla_\gamma\boldsymbol{w}^{\beta_j}\otimes\boldsymbol{w}^{\beta_{j+1}}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{w}^{\beta_n} \\
&= T^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_n,\gamma}\boldsymbol{e}_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{\alpha_m}\otimes\boldsymbol{w}^{\beta_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}^{\beta_n} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m} T^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_n}\boldsymbol{e}_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{\alpha_{i-1}}\otimes\left(\mathit{\Gamma}^{\mu}{}_{\alpha_i\gamma}\boldsymbol{e}_\mu\right)\otimes\boldsymbol{e}_{\alpha_{i+1}}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{\alpha_m}\otimes\boldsymbol{w}^{\beta_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}^{\beta_n} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n} T^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_n}\boldsymbol{e}_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{\alpha_m}\otimes\boldsymbol{w}^{\beta_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{w}^{\beta_{j-1}}\otimes\left(-\mathit{\Gamma}^{\beta_j}{}_{\nu\gamma}\boldsymbol{w}^\nu\right)\otimes\boldsymbol{w}^{\alpha_{j+1}}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{w}^{\beta_n} \\
&= T^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_n,\gamma}\boldsymbol{e}_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{\alpha_m}\otimes\boldsymbol{w}^{\beta_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}^{\beta_n} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m} \mathit{\Gamma}^{\mu}{}_{\alpha_i\gamma} T^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_n}\boldsymbol{e}_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{\alpha_{i-1}}\otimes\boldsymbol{e}_\mu\otimes\boldsymbol{e}_{\alpha_{i+1}}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{\alpha_m}\otimes\boldsymbol{w}^{\beta_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{w}^{\beta_n} \\
&\quad - \sum_{j=1}^{n} \mathit{\Gamma}^{\beta_j}{}_{\nu\gamma} T^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_n}\boldsymbol{e}_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{\alpha_m}\otimes\boldsymbol{w}^{\beta_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{w}^{\beta_{j-1}}\otimes\boldsymbol{w}^\nu\otimes\boldsymbol{w}^{\alpha_{j+1}}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{w}^{\beta_n} \\
&= T^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_n,\gamma}\boldsymbol{e}_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{\alpha_m}\otimes\boldsymbol{w}^{\beta_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}^{\beta_n} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m} \mathit{\Gamma}^{\alpha_i}{}_{\mu\gamma} T^{\alpha_1\cdots\alpha_{i-1}\mu\alpha_{i+1}\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_n}\boldsymbol{e}_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{\alpha_{i-1}}\otimes\boldsymbol{e}_{\alpha_i}\otimes\boldsymbol{e}_{\alpha_{i+1}}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{\alpha_m}\otimes\boldsymbol{w}^{\beta_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{w}^{\beta_n} \\
&\quad - \sum_{j=1}^{n} \mathit{\Gamma}^{\nu}{}_{\beta_j\gamma} T^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_{j-1}\nu\beta_{j+1}\beta_n}\boldsymbol{e}_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{\alpha_m}\otimes\boldsymbol{w}^{\beta_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{w}^{\beta_{j-1}}\otimes\boldsymbol{w}^{\beta_j}\otimes\boldsymbol{w}^{\alpha_{j+1}}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{w}^{\beta_n} \\
&= \left(T^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_n,\gamma} + \sum_{i=1}^{m}\mathit{\Gamma}^{\alpha_i}{}_{\mu\gamma} T^{\alpha_1\cdots\alpha_{i-1}\mu\alpha_{i+1}\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_n} - \sum_{j=1}^{n}\mathit{\Gamma}^{\mu}{}_{\beta_j\gamma} T^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_{j-1}\mu\beta_{j+1}\beta_n}\right) \\
&\quad \boldsymbol{e}_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{\alpha_m}\boldsymbol{w}^{\beta_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}^{\beta_n}
\end{aligned}
$$

よって，成分を取り出して，

$$
\begin{aligned}
\nabla_\gamma T^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_n} &\overset{\text{def}}{=} T^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_n;\gamma} \\
&= T^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_n,\gamma} + \sum_{i=1}^{m} \mathit{\Gamma}^{\alpha_i}{}_{\mu\gamma} T^{\alpha_1\cdots\alpha_{i-1}\mu\alpha_{i+1}\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_n} - \sum_{j=1}^{n} \mathit{\Gamma}^{\mu}{}_{\beta_j\gamma} T^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_{j-1}\mu\beta_{j+1}\beta_n}
\end{aligned}
$$

が得られた． □

この計算は単にライプニッツ則を随時適用しただけなのであるが，計算が多少煩雑と思われるので，あえて式変形を全て追った．なお，和を取るところでは，必要に応じ添字を取り替えて計算を行っていることに注意が必要である．