## 平行移動の一般化

さて，我々は基底ベクトル $\boldsymbol{e}_\beta$ 方向の共変微分と平行移動の式を得た．しかし，特に平行移動については基底ベクトル方向だけの平行移動だけでは不十分である．そこでここではより一般的な方向への平行移動を定義したい．

点 P の座標を $\boldsymbol{x}$，点 Q の座標を $\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}$ とするとき，点 P でのベクトル $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ を点 Q に平行移動することを考える．通常の全微分の式,

$$d\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \partial_\beta \boldsymbol{u} dx^\beta$$

を導くのと全く同じ論法により,

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}_\parallel(\boldsymbol{x};d\boldsymbol{x}) = \nabla_\beta \boldsymbol{e}_\mu \Big|_{\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}} dx^\beta$$

が成り立つ事が示される．通常の全微分と異なるのは，下の式が $\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}$ で成り立つ式であるという点だけである．よって,

$$\boldsymbol{u}_\parallel(\boldsymbol{x};d\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) - \nabla_\beta \boldsymbol{u} \Big|_{\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}} dx^\beta$$

よって特に，$\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{e}_\mu$ とすれば,

$$\boldsymbol{e}_{\mu\parallel}(\boldsymbol{x};d\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) - \nabla_\beta \boldsymbol{e}_\mu \Big|_{\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}} dx^\beta$$

ここで，前節での定義より,

$$\boldsymbol{e}_\alpha \mathit{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\beta} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \nabla_\beta \boldsymbol{e}_\mu$$

だったから,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_{\mu\parallel}(\boldsymbol{x};d\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{e}_\alpha \mathit{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\beta} \Big|_{\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}} dx^\beta \\
&= \boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{e}_\alpha(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) \mathit{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\beta}(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) dx^\beta \\
&= \boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) - \mathit{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\beta}(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) dx^\beta \boldsymbol{e}_\alpha(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

となる．よって,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_\parallel(\mathrm{P}\to\mathrm{Q}) &= \boldsymbol{u}_\parallel(\boldsymbol{x};d\boldsymbol{x}) \\
&= u^\mu(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{e}_{\mu\parallel}(\boldsymbol{x};d\boldsymbol{x}) \\
&= u^\mu(\boldsymbol{x}) \left( \boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) - \mathit{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\beta}(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) dx^\beta \boldsymbol{e}_\alpha(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) \right) \\
&= u^\mu(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) - \mathit{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\beta}(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) dx^\beta u^\mu(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{e}_\alpha(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) \\
&= u^\mu(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) - \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) dx^\beta u^\alpha(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) \\
&= \left( u^\mu(\boldsymbol{x}) - \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) u^\alpha(\boldsymbol{x}) dx^\beta \right) \boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) \\
&= \left( u^\mu(\boldsymbol{x}) - \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}) u^\alpha(\boldsymbol{x}) dx^\beta \right) \boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

より,

$$\boldsymbol{u}_\parallel(\mathrm{P}\to\mathrm{Q}) = \left( u^\mu(\boldsymbol{x}) - \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}) u^\alpha(\boldsymbol{x}) dx^\beta \right) \boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})$$

となることが示された．なお最後の行の変形は $dx^\beta$ の 2 次以上の項を切り捨ることで得られる．