ベクトルの平行移動と共変微分

一般相対性理論の今後の展開のために，この項ではベクトルの平行移動と共変微分について定義したい．ここでの議論は今後測地線の方程式と呼ばれる式を導く際にも活用される．

有意義な微分を定義するには

ここでは，ベクトル場 $\boldsymbol{u}$ が与えられたときに，基底ベクトル $\boldsymbol{e}_\beta$ 方向の自然な微分を $\nabla_\beta \boldsymbol{u}$ と書くことにし，これを具体的に定義することを考えたい．いま，微分したい点を P とし P の $\boldsymbol{e}_\beta$ 方向の成分を $x^\beta = x$ としよう．また点 P の $\boldsymbol{e}_\beta$ 方向の成分だけが $+dx$ だけずれた $x + dx$ となっている点を P' としよう．以下，この節では $\boldsymbol{e}_\beta$ 方向の成分の変化しか扱わないので，簡単のため，$\boldsymbol{u}(\mathrm{P}) = \boldsymbol{u}(x)$ などの表記を用いる事にする．

このとき，点 P 及び点で P' のベクトル場は，($u^\mu(x)$ がスカラーで，$\boldsymbol{e}_\mu(x)$ はベクトルであることに注意して)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}(\mathrm{P}) &= \boldsymbol{u}(x) = u^\mu(x)\boldsymbol{e}_\mu(x), \\
\boldsymbol{u}(\mathrm{P}') &= \boldsymbol{u}(x+dx) = u^\mu(x+dx)\boldsymbol{e}_\mu(x+dx),
\end{aligned}$$

と書ける．つまり成分の値 u^μ だけでなく，展開するときの基底ベクトル $\boldsymbol{e}_\mu$ もまた場所とともに変化している．さて微分とは大雑把に言えば 2 次以上の項を無視して 1 次式で近似する事であった．そして，無限に近い 2 点においてはその近似は近似ではなくなるのであった．そこで次のような誤解が生じるかもしれない．$\boldsymbol{u}(\mathrm{P}') = \boldsymbol{u}(x+dx)$ は dx が十分小さいとき，展開するときの基底ベクトルとして点 P での基底ベクトルで近似できるのではないだろうか？ もしそうしてよいのなら，

$$\begin{aligned}
\lim_{dx\to 0} \frac{\boldsymbol{u}(\mathrm{P}') - \boldsymbol{u}(\mathrm{P})}{dx} &= \lim_{dx\to 0} \frac{u^\mu(x+dx)\boldsymbol{e}_\mu(x+dx) - u^\mu(x)\boldsymbol{e}_\mu(x)}{dx} \\
&= \lim_{dx\to 0} \frac{u^\mu(x+dx)\boldsymbol{e}_\mu(x) - u^\mu(x)\boldsymbol{e}_\mu(x)}{dx} \\
&= \lim_{dx\to 0} \frac{u^\mu(x+dx) - u^\mu(x)}{dx}\boldsymbol{e}_\mu(x) \\
&= \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\beta}\boldsymbol{e}_\mu(x)
\end{aligned}$$

となりこれは普通に e_β 方向に微分したものと一致することになるのだが $\cdots$ ちょっと考えれば分かることではあるが，一般にそのような近似は成り立たない. いま，

$$\boldsymbol{u}(\mathrm{P}') = u^\mu(x+dx)\boldsymbol{e}_\mu(x+dx)$$

において成分の $u^\mu(x+dx)$ と基底ベクトルの $\boldsymbol{e}_\mu(x+dx)$ をそれぞれ x を中心として一次の項までテイラー展開をしよう．すると，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}(\mathrm{P}') \simeq &\quad \left(u^\mu(x) + \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\beta}dx + O(dx^2)\right)\left(\boldsymbol{e}_\mu(x) + \frac{\partial \boldsymbol{e}_\mu}{\partial x^\beta}dx + O(dx^2)\right) \\
&= u^\mu(x)\boldsymbol{e}_\mu(x) + \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\beta}\boldsymbol{e}_\mu(x) + u^\mu(x)\frac{\partial \boldsymbol{e}_\mu}{\partial x^\beta}dx + O(dx^2)
\end{aligned}$$

となり, 基底を微分した成分が 1 次の項に残ってしまっている．従って, 基底の微分もきちんと考えないといけないことが分かる．この結果より，どんなに近い 2 点であっても，異なる基底による展開をしたベクトルの成分同士の差は幾何学的に意味を成さないことが分かる．そこで次のようにして有意義な微分を定義しよう．

1. ”平行移動”を定義して，$\boldsymbol{u}(\mathrm{P})$ を P' に平行移動した $\boldsymbol{u}_\parallel(\mathrm{P} \to \mathrm{P}')$ をつくる．
2. P' で定義された 2 つのベクトル，$\boldsymbol{u}_\parallel(\mathrm{P} \to \mathrm{P}')$ と $\boldsymbol{u}(\mathrm{P}')$ の差から微分を定義する．

以上のようにして微分を定義すれば上手くいきそうである．次節で具体的にその方法を述べよう．

平行移動と共変微分

前節での流れに従って，ここでは $\boldsymbol{e}_\beta$ 方向の共変微分を定義しよう．まず，点 P でのベクトル $\boldsymbol{u}(x)$ を点 P′ に平行移動したベクトルを $\boldsymbol{u}_\parallel(x;dx) \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{u}_\parallel(\mathrm{P} \to \mathrm{P}')$ とおくと，共変微分の定義より，

$$\nabla_\beta \boldsymbol{u} \overset{\text{def}}{=} \frac{\boldsymbol{u}(x+dx) - \boldsymbol{u}_\parallel(x;dx)}{dx}$$

となる．これより，

$$\boldsymbol{u}_\parallel(x;dx) = \boldsymbol{u}(x+dx) - \nabla_\beta \boldsymbol{u} dx$$

が成り立つ．この式は特に $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_\mu$ の場合でも成り立つので，

$$\boldsymbol{e}_{\mu\parallel}(x;dx) = \boldsymbol{e}_\mu(x+dx) - \nabla_\beta \boldsymbol{e}_\mu dx$$

が得られる．ここで，$\boldsymbol{e}_{\mu\parallel}(x;dx)$ は点 $x+dx$ で定義されているため当然その点の基底 $\boldsymbol{e}_\alpha(x+dx)$ で展開できるはずである．そこで，

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}(x)\boldsymbol{e}_\alpha(x) \overset{\text{def}}{=} \nabla_\beta \boldsymbol{e}_\mu(x)$$

によって係数 $\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}(x)$ を定義すると，$\boldsymbol{e}_{\mu\parallel}(x;dx)$ は，

$$\boldsymbol{e}_{\mu\parallel}(x;dx) = \boldsymbol{e}_\mu(x+dx) - \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}(x+dx)\boldsymbol{e}_\alpha(x+dx)dx$$

と表されることになる．一方，$\boldsymbol{u}(x) = u^\mu \boldsymbol{e}_\mu(x)$ において，$\boldsymbol{e}_\mu(x)$ を点 $x+dx$ に平行移動したものが $\boldsymbol{e}_{\parallel\mu}(x;dx)$ なのだから，線形性より，

$$\boldsymbol{u}_\parallel(x;dx) = u^\mu(x)\boldsymbol{e}_{\parallel\mu}(x;dx)$$

が成り立つ．以上より，結局 $\boldsymbol{u}_\parallel(x;dx)$ は，

$$\boldsymbol{u}_\parallel(x;dx) = u^\mu(x)\boldsymbol{e}_{\parallel\mu}(x;dx) = u^\mu(x)\boldsymbol{e}_\mu(x+dx) - u^\mu(x)\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}(x+dx)\boldsymbol{e}_\alpha(x+dx)dx$$

と表されるので，

$$\begin{aligned}
\nabla_\beta \boldsymbol{u} &= \frac{\boldsymbol{u}(x+dx) - \boldsymbol{u}_\parallel(x;dx)}{dx} \\
&= \frac{u^\mu(x+dx)\boldsymbol{e}_\mu(x+dx) - \left(u^\mu(x)\boldsymbol{e}_\mu(x+dx) - u^\mu(x)\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}(x+dx)\boldsymbol{e}_\alpha(x+dx)dx\right)}{dx} \\
&= \frac{u^\mu(x+dx) - u^\mu(x)}{dx}\boldsymbol{e}_\mu(x+dx) + u^\mu(x)\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}(x+dx)\boldsymbol{e}_\alpha(x+dx) \\
&= \frac{u^\mu(x+dx) - u^\mu(x)}{dx}\boldsymbol{e}_\mu(x+dx) + u^\alpha(x)\Gamma^\mu{}_{\beta\alpha}(x+dx)\boldsymbol{e}_\mu(x+dx) \\
&= \left(\left.\frac{\partial u^\mu}{\partial x^\beta}\right|_{x^\beta=x} + u^\alpha(x)\Gamma^\mu{}_{\beta\alpha}(x+dx)\right)\boldsymbol{e}_\mu(x+dx) \\
&= \left(\left.\frac{\partial u^\mu}{\partial x^\beta}\right|_{x^\beta=x} + u^\alpha(x)\Gamma^\mu{}_{\beta\alpha}(x)\right)\boldsymbol{e}_\mu(x) \\
&= \left(u^\mu{}_{,\beta} + u^\alpha \Gamma^\mu{}_{\beta\alpha}\right)\boldsymbol{e}_\mu
\end{aligned}$$

より，

$$\nabla_\beta \boldsymbol{u} = \left(u^\mu{}_{,\beta} + u^\alpha \Gamma^\mu{}_{\beta\alpha}\right)\boldsymbol{e}_\mu$$

あるいは，成分表示して，

$$u^\mu{}_{;\beta} \overset{\text{def}}{=} \nabla_\beta u^\mu = u^\mu{}_{,\beta} + u^\alpha \Gamma^\mu{}_{\beta\alpha}$$

が成り立つ事が示された．なお，式変形の途中で dx の 1 次以上のオーダーが無視できることを使っているのに注意が必要である．

また，式中の $u^{\mu}{}_{,\beta}$, $u^{\mu}{}_{;\beta}$ は，

$$u^{\mu}{}_{,\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial u^{\mu}}{\partial x^{\beta}},$$
$$u^{\mu}{}_{;\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_{\beta} u^{\mu},$$

によって定義される略記法であり，今後もよく使うので覚えておこう．

まとめれば，$\boldsymbol{e}_{\beta}$ 方向の共変微分は，

$$\nabla_{\beta}\boldsymbol{u} = (\nabla_{\beta}u^{\mu})\boldsymbol{e}_{\mu} + u^{\mu}(\nabla_{\beta}\boldsymbol{e}_{\mu}) = \left(u^{\mu}{}_{,\beta} + u^{\alpha}\mathit{\Gamma}^{\mu}{}_{\alpha\beta}\right)\boldsymbol{e}_{\mu} = u^{\mu}{}_{;\beta}\boldsymbol{e}_{\mu}$$

となる．ただし，ここでの $\nabla_{\beta}u^{\mu}$ は $\boldsymbol{u}$ の係数 (=スカラー) に対する共変微分なので，意味的には普通の偏微分となっている点が上の定義式と大きく異なる．こうすると共変微分とは，実は単にライプニッツ則 (chain rule) に従って，ベクトルの成分の偏微分 (第 1 項) と基底ベクトルの微分 (第 2 項) を計算しただけの事である．これは局所的に座標ベクトルの取り方が自由である，という一般相対論の思想に忠実な式となっている．こう考えれば，1 つの基底ベクトルが与えられたときに，次に隣の基底ベクトルをどう選ぶかを決める関係式が必要であることがわかる．　これがまさに $\mathit{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ なのであり，そのため接続係数 (connection) と呼ばれている．