

# いくつかの宇宙モデルの紹介 (1)

われわれは、前項までに完全流体で満たされた一様等方宇宙がどのような方程式を満たすべきかということから次の二つの方程式を得た。

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{c^2\Lambda}{3} \quad (1)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho c^2 + 3p) + \frac{c^2\Lambda}{3} \quad (2)$$

(1) はフリードマン方程式と呼ばれているが、この二つの方程式は、一様等方で完全流体で満たされた宇宙の解としてはごく一般的なものなので、ここからさまざまな条件設定を行うことによりいろいろな宇宙モデルが構築できる。ここではそのような宇宙モデルについて紹介することにする。その前に、上の二つの式からもう一つ重要な式を導いておこう。(1) 式の両辺に  $a^2$  を掛けて  $t$  で微分すると、

$$2\dot{a}\ddot{a} = \frac{8\pi G}{3} \frac{d}{dt}(\rho a^2) + \frac{2c^2\Lambda}{3} a\dot{a} \quad (3)$$

この式の両辺を  $2a\dot{a}$  で割ると、

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3a\dot{a}} \frac{d}{dt}(\rho a^2) + \frac{c^2\Lambda}{3} \quad (4)$$

この式の右辺が (2) 式と等しいから、

$$-\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho c^2 + 3p) + \frac{c^2\Lambda}{3} = \frac{4\pi G}{3a\dot{a}} \frac{d}{dt}(\rho a^2) + \frac{c^2\Lambda}{3}$$

これより、

$$\rho c^2 + 3p = -\frac{c^2}{a\dot{a}} \frac{d}{dt}(\rho a^2) = -\frac{c^2}{a\dot{a}}(\dot{\rho} a^2 + 2\rho a\dot{a}) = -\frac{c^2 a}{\dot{a}} \dot{\rho} - 2c^2 \rho$$

だから、

$$\dot{\rho} c^2 + 3(\rho c^2 + p) \frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (5)$$

を得る。この式は両辺に  $a^3$  を掛けてやると、

$$\dot{\rho} c^2 a^3 + 3\rho c^2 a^2 \dot{a} + 3pa^2 \dot{a} = 0 \quad (6)$$

となるが、これは、

$$\frac{d}{dt}(\rho c^2 a^3) + p \frac{da^3}{dt} = 0 \quad (7)$$

に等しい。

# 1 アインシュタインの静止宇宙モデル

(1), (2) 式から空間が膨張も収縮もしない, いわば静止した宇宙の解を得るにはどうしたらよいか? それに答えるようにして導かれたのがアインシュタインの静止宇宙モデルの解である. いまここで宇宙が膨張も収縮もしないものと仮定する. これは (1), (2) 式においてスケールファクター  $a(t)$  が定数, すなわち  $\dot{a}(t) = 0$  かつ  $\ddot{a}(t) = 0$  が成り立つことを意味する. これを (1), (2) 式に代入すると,

$$\frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{c^2\Lambda}{3} = 0 \quad (8)$$

$$-\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho c^2 + 3p) + \frac{c^2\Lambda}{3} = 0 \quad (9)$$

が得られるが, もしここで宇宙定数  $\Lambda$  が 0 だとすると, (2) 式より,  $p = -\frac{1}{3}\rho c^2 < 0$  となり圧力が負になるので, 通常物質では説明がつかなくなる. そこで (3), (4) 式が密度  $\rho > 0$  かつ圧力  $p \geq 0$  となる解を持つように宇宙定数  $\Lambda \neq 0$  を決めてやることにより, 膨張も収縮もしない宇宙モデルを構築しようとしたのがアインシュタインの静止宇宙モデルである. アインシュタインはさらに宇宙が薄いガスで満たされているという近似ができると仮定した. 事実, 地球はとても薄いガスで近似出来るような存在とは考えられないが, 宇宙の大半を占めるのは殆ど真空の空間と薄いガスでできていると考えられていた. この近似によって, 流体の圧力  $p$  は 0 であるとしてよいため, (3), (4) 式より,

$$a = c\sqrt{\frac{K}{4\pi G\rho}}, \quad \Lambda = \frac{4\pi G\rho}{c^2}$$

が得られることになる. この解では  $K > 0$  のため, 閉じた宇宙になる.

# 2 平坦で宇宙項がなく, かつ圧力が密度に定比例する場合

次に宇宙定数  $\Lambda$  が 0 であるような宇宙モデルを考えよう. まず最も簡単なのが, 宇宙項が無くて, 空間が平坦かつ圧力  $p$  が密度  $\rho$  に定比例する場合である. この場合各パラメータは  $\Lambda = K = 0$ , かつ  $p = \omega\rho c^2$  ( $\omega = const.$ ) と表せるので, (5) 式に代入すると,

$$\dot{\rho}c^2 + 3(\rho c^2 + \omega\rho c^2)\frac{\dot{a}}{a} = \dot{\rho}c^2 + 3\rho c^2(1 + \omega)\frac{\dot{a}}{a} = 0$$

つまり,

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} + 3(1 + \omega)\frac{\dot{a}}{a} = 0$$

これより,

$$\rho a^{3(1+\omega)} = \rho_0 a_0^{3(1+\omega)} = const.$$

を得る. なお,  $\rho_0, a_0$  はそれぞれ, 現在のエネルギー密度とスケールファクターである. これより,  $\omega = -1$  の時は,  $\rho = \rho_0 = const.$  だから, (1) 式に各値を代入すると,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 \quad (10)$$

だから,  $H_0 \equiv \sqrt{\frac{8\pi G\rho_0}{3}}$  と置くと,  $\dot{a} \geq 0$  の場合,

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_0$$

より,

$$\ln \frac{a(t)}{a(0)} = \ln |a(t)| - \ln |a(0)| = H_0 t - 0$$

だから,

$$a(t) = a(0)e^{H_0 t}$$

を得る。式の形から明らかのようにこれは指数関数的に膨張する宇宙の解となっている。逆に  $\dot{a} \leq 0$  の場合、

$$a(t) = a(0)e^{-H_0 t}$$

よりこれは収縮する宇宙の解となる。一方  $\omega \neq -1$  とすると、(1) 式は、

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho_0}{3} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+\omega)}$$

となるので、 $\dot{a} \geq 0$  とすると、

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_0}{3}} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{\frac{3(1+\omega)}{2}}$$

よって  $\frac{1}{\alpha} = \frac{3(1+\omega)}{2}$  とおくと、

$$a^{\frac{1}{\alpha}-1} \cdot \dot{a} = H_0 a_0^{\frac{1}{\alpha}}$$

よってこれより、

$$\alpha a^{\frac{1}{\alpha}} = H_0 a_0^{\frac{1}{\alpha}} t + C = H_0 a_0^{\frac{1}{\alpha}} \left(t + \frac{C}{H_0 a_0^{\frac{1}{\alpha}}}\right)$$

より、

$$a = a_0 \left(\frac{H_0}{\alpha}\right)^\alpha \left(t + \frac{C}{H_0}\right)^\alpha$$

ここで  $t = -\frac{C}{H_0}$  において  $a(t) = 0$  となるのでこの解の始まりの点は  $t = -\frac{C}{H_0}$  である。そこでこの点を時間の始まりの点、即ち  $t = 0$  の点とすると (11) 式は  $t > 0$  の範囲で解を持ち、

$$a(t) = a_0 \left(\frac{H_0}{\alpha}\right)^\alpha t^\alpha \quad (11)$$

と表されることになる。ここでさらに現在の宇宙の年齢を  $t_0$  とすると、

$$a_0 = a(t_0) = a_0 \left(\frac{H_0}{\alpha}\right)^\alpha t_0^\alpha$$

だから

$$\left(\frac{H_0}{\alpha}\right)^\alpha = t_0^{-\alpha} \quad (12)$$

が得られるので、(12) 式は、

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^\alpha$$

と表すことができる。 $\dot{a} \leq 0$  の場合は、普通に計算をしてもよいが、 $t \rightarrow -t$  の時間反転をし、 $t = 0$  の点で、ビッグクランチをむかえるとすれば、現在の宇宙の年齢が負になる点が一見不自然のようではあるが、上の解がそのまま使える。これは単に  $t = 0$  なる軸、即ち  $y = a(t)$  なる  $y$  軸対称なものも解となるからである。

さて、以上の結果より、 $\omega > -\frac{1}{3}$  のとき、 $\alpha < 1$  となるので宇宙は減速膨張或いは加速収縮することになる。物質が通常の流体の場合、その音速は  $v_s^2 = \frac{dp}{d\rho} = \omega c^2$  で与えられるから、 $\omega \geq 0$  であろう。従って、この場合宇宙は減速膨張或いは加速収縮していることになる。特に  $\omega = 0$  の場合、宇宙を満たす流体は圧力 0 の完全流体、即ちダスト流体になる。この場合、 $a(t) \propto t^{\frac{2}{3}}$  となるが、この空間が平坦なダスト優勢モデルをアインシュタイン・ジッター宇宙モデルという。通常の流体はその流れの速度が光速より充分ゆっくりで、その流体中を伝わる音速  $v_s = \sqrt{\omega}c$  は光速  $c$  より充分小さい。従って  $\omega \ll 1$  が成り立つので、このダスト優勢モデルはよい近似を与えるものと期待される。そこでこのモデルを単に物質優勢宇宙とも呼ぶ。なお、(12) 式より、 $\omega$  の値が分かる場合、現在の宇宙のエネルギー密度  $\rho_0$  が分かれば、現在の宇宙の年齢  $t_0$  が分かり、逆に現在の宇宙の年齢が分かれば、現在の宇宙のエネルギー密度が分かることになる。

## フリードマンの宇宙モデル

前項では空間が平坦、即ち  $K = 0$  と仮定した。この項では一般の  $K$  について解の挙動を調べてみよう。ただし、宇宙定数  $\Lambda = 0$  だけでなく、圧力  $p$  も 0 とする。方程式を解くのが大変になってしまうからである。また、前項で説明したように、この近似は物質優勢宇宙のよい近似を与えるものと考えられるので、この仮定は妥当であるといえよう。

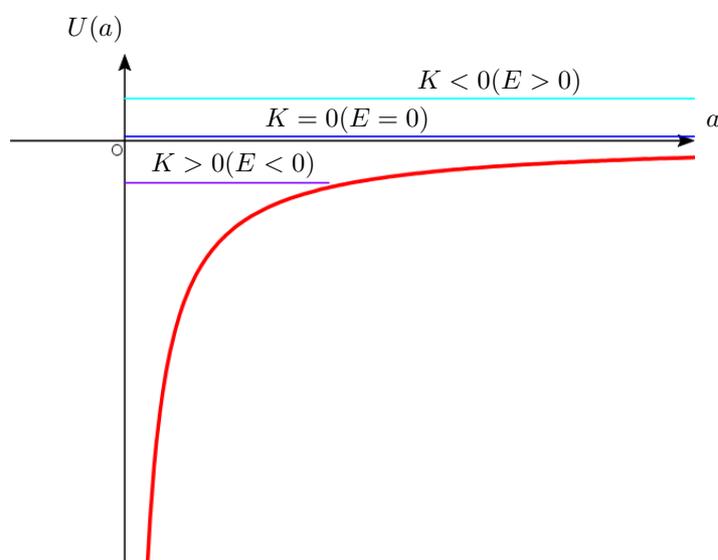
この仮定より、フリードマン方程式 (1) は、

$$\frac{1}{2}\dot{a}^2 - G\frac{(4/3\pi a^3\rho)}{a} = -\frac{K}{2}c^2 \quad (13)$$

のように書き換えられる。この式において圧力  $p$  が 0 であるのであるから、 $4/3\pi a^3\rho$  は密度が  $\rho$  で半径が  $a$  である球形の物体の質量を表しているのだから、これを  $M$  と置こう。さらに  $r = a$ ,  $v = \dot{a}$  と置き、両辺に適当な質量  $m$  を掛けてやると、(13) 式は、

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = -\frac{K}{2}mc^2 \quad (14)$$

この式の左辺は、中心質量が  $M = 4/3\pi a^3\rho$  である重力ポテンシャル中で運動する質点のエネルギーを表している。また、(7) 式より、 $\rho c^2 a^3 = \text{const.}$  だから  $M$  は一定である。従って、この式の右辺が全エネルギー  $E$  を表していることになるから、 $K$  の値によってこのポテンシャルにとらわれた質点の運動が決まることになる。



$K < 0$  のとき、即ち  $E > 0$  のとき、質点は重力ポテンシャルの影響を受けて減速しながらも  $r = \infty$  の無限遠方まで飛び出せる。ここで  $r$  は元々スケールファクター  $a(t)$  だったのだから、この意味は宇宙が永遠に減速膨張することを意味する。 $K = 0$  のときも同様に減速膨張をし続けるが、無限遠方での質点の運動エネルギーが 0 になることより、宇宙の膨張速度は徐々に 0 に近づくことになる。一方  $K > 0$  のときは、質点はある位置までいくと再び中心に落ち込んでしまうため、宇宙の膨張があるスケール  $a(t)$  までいったあと減速膨張から加速収縮に転じて最終的にスケールが 0 即ち、ビッグクランチをむかえることになる。

### $K$ の値別のフリードマン宇宙の挙動

さて、大雑把な解の挙動が分かったところで、今度は、この宇宙モデルの厳密解を求めよう。その前に、この解を簡単に表すための準備として、再びロバートソン・ウォーカー計量の表現の見直しをしよう。ロバートソン・ウォーカー計量からアインシュタインテンソルを求め、そこからフリードマン方程式を含む 3 つの方程式を得たのだから、あまり複雑な変更をすると全部やり直しになってしまう可能性があるが、ここでの修正は簡単な修正なので、後に続く方程式の修正もごく僅かですむので安心されたい。

さて、ロバートソン・ウォーカー計量は次の不変間隔で表されるものであった:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] \quad (15)$$

ここで  $a(t)$  は空間の大きさを表す項でスケールファクターと呼ぶのであった。それではこのスケールファクターが仮に1だったとしたら、空間成分の作り出す空間の大きさは一意に決まるであろうか？、勿論これは成り立たない。何故なら空間成分の中に任意定数  $K$  が含まれるからである。この  $K$  は実はガウス曲率になっており、 $K$  の値によって空間の曲がり方の大きさが変わるため、一様にその曲率が適用されることによって作られる空間のサイズはガウス曲率  $K$  にも依存してしまうのである。そこで我々はここで、問題を単純化するために空間の大きさに関連する項目を全てスケールファクター  $a(t)$  に担わせることができなから考えてみよう。今、空間の曲率  $K$  は、正か負か或いは0である。このうち  $K = 0$  の場合は既に空間の大きさはスケールファクターだけに担わせてあることになるのでそのまま問題は無い。  $K > 0$  のとき、 $K$  の値に違いはあれど、空間の形状は曲率の大小を除けば、半径  $\frac{1}{\sqrt{K}}$  の3次元球面  $S^3$  になる点で一緒である。同様に  $K < 0$  の場合も曲率の大小の差こそあれ3次元双曲面になることは一緒である。そこでこの空間を空間の大きさを除いて正規化すると、 $k = 0, k = +1, k = -1$  の3パターンしかなく分かる。以上の考察より、不変間隔の空間成分に現れる  $K$  を新たに定義した  $k = \frac{K}{|K|}$  に置き換えるために、 $\bar{r} \equiv \sqrt{|K|}r$  と置くと、ロバートソン・ウォーカー計量は、

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[ \frac{1}{|K|} \frac{d\bar{r}^2}{1 - \frac{K}{|K|}\bar{r}^2} + \frac{\bar{r}^2}{|K|} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]$$

$$\therefore ds^2 = -c^2 dt^2 + \frac{a(t)^2}{|K|} \left[ \frac{d\bar{r}^2}{1 - k\bar{r}^2} + \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]$$

従ってこれより、 $\bar{a}(t) \equiv \frac{a(t)}{\sqrt{|K|}}$  と置けば、ロバートソンウォーカー計量は、

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \bar{a}(t)^2 \left[ \frac{d\bar{r}^2}{1 - k\bar{r}^2} + \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]$$

と表されることになる。ここで、元々  $K$  は定数なのだから、この置き換えで本質的になんら計量が影響を受けることはない。そこで改めて  $r$  や  $a(t)$  の上についている一をとって、

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] \quad (16)$$

としても何ら問題が無いことになる。この置き換えをリスケーリングと呼ぶ。

さて、(15) 式をリスケーリングした結果得られた(16)式を見ると、単に  $K$  から  $k$  に換わっただけであることが分かる。我々は  $K$  を任意の定数としてフリードマン方程式までを求めたのであるから、実はフリードマン方程式は、 $K$  を  $k$  に置き換えただけのものも成り立つことになる。従って、

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{c^2 \Lambda}{3} \quad (17)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\rho c^2 + 3p) + \frac{c^2 \Lambda}{3} \quad (18)$$

および、

$$\frac{d}{dt} (\rho c^2 a^3) + p \frac{da^3}{dt} = 0 \quad (19)$$

も成り立っていることになる。そこでここでは、こちらの表現を用いて  $k = 0$  以外の場合の一般のフリードマン解を求めよう。

## フリードマン解を求める

宇宙項がなく ( $\Lambda = 0$ ), 物質優勢のダストモデル ( $p = 0$ ) を仮定する. ここで空間が至るところ平坦な  $k = 0$  の場合は, 前項で既に紹介した  $K = 0$  の場合そのものなのでこの項では  $k \neq 0$ , 即ち  $k = \pm 1$  として話を進めよう. このとき (17) 式は

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} \quad (20)$$

となる. また (19) 式より,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\rho c^2 a^3) &= 0, \\ \therefore \rho c^2 a^3 &= \text{const.} \end{aligned}$$

だから現在の宇宙のエネルギー密度と宇宙のスケールを用いて

$$\rho a^3 = \rho_0 a_0^3 \quad (21)$$

と表しておこう. すると, (20) 式に  $a^2$  を掛けて, (21) 式を代入すると,

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G\rho a^3}{3} \frac{1}{a} - kc^2 = \frac{8\pi G\rho_0 a_0^3}{3} \frac{1}{a} - kc^2 \quad (22)$$

が得られるので, 計算を見やすくするために,  $A \equiv \frac{8\pi G\rho_0 a_0^3}{3}$  と置こう. すると (22) 式より,  $\dot{a} \geq 0$  ならば,

$$\frac{da}{dt} = \dot{a} = \sqrt{\frac{A}{a} - kc^2} \quad (23)$$

が得られる. ここですっきりとした解を求めるために,  $ad\eta = cdt$  によって共形的時間  $\eta$  を導入しよう. するとこれより,  $\frac{dt}{d\eta} = \frac{a}{c}$  だから,

$$\frac{da}{d\eta} = \frac{da}{dt} \frac{dt}{d\eta} = \frac{a}{c} \sqrt{\frac{A}{a} - kc^2} = \sqrt{\frac{A}{c^2} a - ka^2} = \sqrt{-k \left(a - \frac{kA}{2c^2}\right)^2 + k \left(\frac{A}{2c^2}\right)^2}$$

よって,

$$\frac{da}{\sqrt{-k \left(a - \frac{kA}{2c^2}\right)^2 + k \left(\frac{A}{2c^2}\right)^2}} = d\eta \quad (24)$$

が得られる. ここでこの膨張解  $\dot{a} \geq 0$  に対し計算を簡単にするため初期条件,  $t = 0$  のとき  $a(0) = 0$  としよう. またこのとき共形的時間  $\eta$  も 0 としよう. すると, (24) 式より,

$$\int_0^{a(t)} \frac{da}{\sqrt{-k \left(a - \frac{kA}{2c^2}\right)^2 + k \left(\frac{A}{2c^2}\right)^2}} = \int_0^{\eta(t)} d\eta = \eta(t) \quad (25)$$

が得られる. 一方,  $\dot{a} \leq 0$  のときは,

$$\int_{a(t_m)}^{a(t)} -\frac{da}{\sqrt{-k \left(a - \frac{kA}{2c^2}\right)^2 + k \left(\frac{A}{2c^2}\right)^2}} = \int_{\eta(t_m)}^{\eta(t)} d\eta = \eta(t) - \eta(t_m) \quad (26)$$

となる. ここで  $t_m$  は  $a(t)$  が最大である時刻とする. この積分を  $k$  の値別に解こう.

$k = 1$  の場合

式 (25) の左辺は,

$$\int_0^{a(t)} \frac{da}{\sqrt{\left(\frac{A}{2c^2}\right)^2 - \left(\frac{A}{2c^2} - a\right)^2}} \quad (27)$$

$$\frac{A}{2c^2} - a \equiv \frac{A}{2c^2} \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$$

と置くと,

$$da = \frac{A}{2c^2} \sin \theta d\theta,$$

$$\sqrt{\left(\frac{A}{2c^2}\right)^2 - \left(\frac{A}{2c^2} - a\right)^2} = \frac{A}{2c^2} \sin \theta \quad (\because 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$$

となるので, (27) 式の積分は,

$$\int_0^{a(t)} \frac{da}{\sqrt{\left(\frac{A}{2c^2}\right)^2 - \left(\frac{A}{2c^2} - a\right)^2}} = \int_0^\theta d\theta = \theta = \cos^{-1} \left( \frac{\frac{A}{2c^2} - a}{\frac{A}{2c^2}} \right) = \eta \quad (28)$$

よってこれより,

$$a = \frac{A}{2c^2} (1 - \cos \eta)$$

が得られるので,

$$cdt = ad\eta = \frac{A}{2c^2} (1 - \cos \eta) d\eta$$

より,

$$t = \frac{A}{2c^3} (\eta - \sin \eta)$$

が得られる. 以上より,

$$a = \frac{4\pi G\rho_0 a_0^3}{3c^2} (1 - \cos \eta), \quad t = \frac{4\pi G\rho_0 a_0^3}{3c^3} (\eta - \sin \eta)$$

となることが分かった.

$\dot{a} \leq 0$  の場合,

$$\frac{A}{2c^2} - a \equiv -\frac{A}{2c^2} \cos \theta \quad \left(\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi\right)$$

と置くと,

$$da = -\frac{A}{2c^2} \sin \theta d\theta,$$

$$-\sqrt{\left(\frac{A}{2c^2}\right)^2 - \left(\frac{A}{2c^2} - a\right)^2} = -\frac{A}{2c^2} \sin \theta \quad (\because \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi)$$

となるので, (26) 式の積分は,

$$\int_{a(t_m)}^{a(t)} -\frac{da}{\sqrt{\left(\frac{A}{2c^2}\right)^2 - \left(\frac{A}{2c^2} - a\right)^2}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^\theta d\theta = \theta - \frac{\pi}{2} = \cos^{-1} \left( \frac{\frac{A}{2c^2} - a}{\frac{A}{2c^2}} \right) - \frac{\pi}{2} = \eta(t) - \eta(t_m) \quad (29)$$

となるので,

$$a = \frac{4\pi G\rho_0 a_0^3}{3c^2} \left[ 1 - \cos \left( \eta - \eta(t_m) + \frac{\pi}{2} \right) \right], \quad t = \frac{4\pi G\rho_0 a_0^3}{3c^3} \left[ \left( \eta - \eta(t_m) + \frac{\pi}{2} \right) - \sin \left( \eta - \eta(t_m) + \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

となる. ここで  $\eta(t_m) \equiv \frac{\pi}{2}$  とすれば,  $\dot{a} \geq 0$  のグラフと  $\dot{a} \leq 0$  のグラフが滑らかにつながるから,  $0 \leq \eta \leq \pi$  の範囲で,

$$a = \frac{4\pi G\rho_0 a_0^3}{3c^2} (1 - \cos \eta), \quad t = \frac{4\pi G\rho_0 a_0^3}{3c^3} (\eta - \sin \eta)$$

が成り立つことが分かった.

$k = -1$  の場合

式 (25) の左辺は,

$$\int_0^{a(t)} \frac{da}{\sqrt{\left(a + \frac{A}{2c^2}\right)^2 - \left(\frac{A}{2c^2}\right)^2}} \quad (30)$$

となるので,

$$a + \frac{A}{2c^2} \equiv \frac{A}{2c^2} \cosh \theta$$

と置くと,

$$\begin{aligned} da &= \frac{A}{2c^2} \sinh \theta d\theta, \\ \sqrt{\left(a + \frac{A}{2c^2}\right)^2 - \left(\frac{A}{2c^2}\right)^2} &= \frac{A}{2c^2} \sinh \theta \end{aligned}$$

となるので, (28) 式の積分は,

$$\int_0^{a(t)} \frac{da}{\sqrt{\left(a + \frac{A}{2c^2}\right)^2 - \left(\frac{A}{2c^2}\right)^2}} = \int_0^\theta d\theta = \theta = \cosh^{-1} \left( \frac{a + \frac{A}{2c^2}}{\frac{A}{2c^2}} \right) = \eta \quad (31)$$

よってこれより,

$$a = \frac{A}{2c^2} (\cosh \eta - 1)$$

が得られるので,

$$cdt = ad\eta = \frac{A}{2c^2} (\cosh \eta - 1) d\eta$$

より,

$$t = \frac{A}{2c^3} (\sinh \eta - \eta)$$

が得られる. 以上より,

$$a = \frac{4\pi G\rho_0 a_0^3}{3c^2} (\cosh \eta - 1), \quad t = \frac{4\pi G\rho_0 a_0^3}{3c^3} (\sinh \eta - \eta)$$

となることが分かった.

## フリードマン解のグラフ

フリードマンモデルの厳密解が全ての  $k$  について求められたので、ここで全ての場合の解を記そう:

$$k = 0 \text{ のとき: } a(t) = \sqrt[3]{6\pi G \rho_0 a_0} t^{2/3} \quad (32)$$

$$k = +1 \text{ のとき: } a(\eta) = \frac{4\pi a_0^3 \rho_0 G}{3c^2} (1 - \cos \eta), \quad t(\eta) = \frac{4\pi a_0^3 \rho_0 G}{3c^3} (\eta - \sin \eta) \quad (33)$$

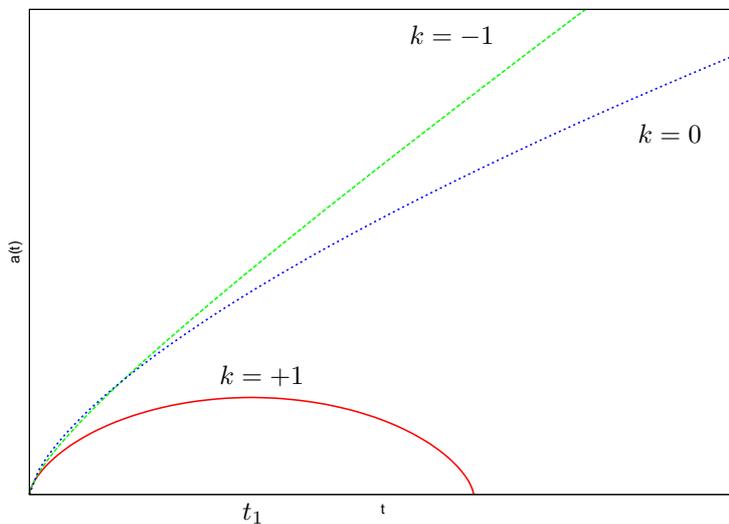
$$k = -1 \text{ のとき: } a(\eta) = \frac{4\pi a_0^3 \rho_0 G}{3c^2} (\cosh \eta - 1), \quad t(\eta) = \frac{4\pi a_0^3 \rho_0 G}{3c^3} (\sinh \eta - \eta) \quad (34)$$

ここで、 $k = 0$  の場合が、共形的時間によるパラメータ表示がされていないので対称性が見えにくいかもしれない。そこで式 (23) で  $k = 0$  として、敢えて共形的時間を導入して計算をしてみると次の解を得る:

$$a(\eta) = \frac{4\pi a_0^3 \rho_0 G}{3c^2} \cdot \frac{1}{2} \eta^2 = \frac{4\pi a_0^3 \rho_0 G}{3c^2} \cdot \left(\frac{1}{6} \eta^3\right)', \quad (35)$$

$$t(\eta) = \frac{4\pi a_0^3 \rho_0 G}{3c^3} \cdot \frac{1}{6} \eta^3 \quad (36)$$

この解をみると、 $1/6\eta^3$  が  $\eta - \sin \eta$  や  $\sinh \eta - \eta$  に対応し、 $1/2\eta^2$  が  $1 - \cos \eta$  や  $\cosh \eta - 1$  に対応していることが見て取れる。また、(35) ÷ (36) より、 $a/t = 3c/\eta$ 、即ち、 $\eta = 3ct/a$  が得られるので、これを (35) 式に代入することにより、確かに (32) 式が得られることが分かる。なお、全ての解に共通であるが、係数の部分に、 $4/3\pi a_0^3 \rho_0$  という項が含まれている。これは言うまでもなく、密度が  $\rho_0$  で半径が  $a_0$  である球の質量を表している。 $\rho_0$ 、 $a_0$  はそれぞれ現在の宇宙のエネルギー密度≒質量密度と宇宙のスケールを表している。ここでの式は宇宙全体を表すもので、通常の球形の物体と異なり”外側の空間”といったものを必要としない。従って、この部分が単純に宇宙全体の球形な質量分布を表しているとは言いがたいが、一様等方性、即ち球対称かつ一様という仮定の下で球の質量に相当する項が現れたのは興味深いことではある。



$k$  の値別のフリードマン宇宙の時間発展の様子

以上よりフリードマンの厳密解が得られたのでこのフリードマンモデルの時間発展の様子がはっきりしたことになる。グラフに表すと左のようになる。既に説明したように  $k = -1$  の場合は永遠に減速膨張を続け、 $k = 0$  の場合は永遠に減速膨張を続けるが充分時間がたつとその膨張速度は  $k = -1$  の場合と異なりほぼ 0 になる。一方  $k = +1$  の場合はある時間  $t_1$  を境に減速膨張が加速収縮に転じ、最終的にビッグクランチを迎える。また  $t_1$  を境にグラフは対称になる。