接続係数を計量で表す

さて，接続係数はもちろん任意ではなく通常の空間で定義される直感的な平行移動の概念と矛盾しない事が必要である．そこで接続係数に対する条件として，平行移動によってベクトルの大きさと任意の二つのベクトルのなす角が不変に保たれる事を要求しよう．これは任意の二つのベクトルの内積が不変である事を意味する．すなわち,

$$\text{条件}: \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}_{\parallel}(\boldsymbol{x};d\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{B}_{\parallel}(\boldsymbol{x};d\boldsymbol{x})$$

となる．この条件を具体的に計算してみよう．まず左辺は,

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = (A^\mu(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{x}))\cdot(B^\nu(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_\nu(\boldsymbol{x})) = A^\mu(\boldsymbol{x})B^\nu(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{e}_\nu(\boldsymbol{x}) = g_{\mu\nu}(\boldsymbol{x})A^\mu(\boldsymbol{x})B^\nu(\boldsymbol{x}) = g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu$$

同様に右辺は，必要に応じテイラー展開で展開近似して,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_{\parallel}(\boldsymbol{x};d\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{B}_{\parallel}(\boldsymbol{x};d\boldsymbol{x}) &= \left(A^\mu(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_{\mu\parallel}(\boldsymbol{x};d\boldsymbol{x})\right)\cdot\left(B^\nu(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_{\nu\parallel}(\boldsymbol{x};d\boldsymbol{x})\right)\\
&= \left\{\left(A^\mu(\boldsymbol{x}) - \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}A^\alpha(\boldsymbol{x})dx^\beta\right)\boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})\right\}\cdot\left\{\left(B^\nu(\boldsymbol{x}) - \Gamma^\nu{}_{\kappa\lambda}B^\kappa(\boldsymbol{x})dx^\lambda\right)\boldsymbol{e}_\nu(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})\right\}\\
&= \left(A^\mu(\boldsymbol{x}) - \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}A^\alpha(\boldsymbol{x})dx^\beta\right)\left(B^\nu(\boldsymbol{x}) - \Gamma^\nu{}_{\kappa\lambda}B^\kappa(\boldsymbol{x})dx^\lambda\right)\boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{e}_\nu(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})\\
&= \left(A^\mu(\boldsymbol{x})B^\nu(\boldsymbol{x}) - A^\mu(\boldsymbol{x})\Gamma^\nu{}_{\kappa\lambda}B^\kappa(\boldsymbol{x})dx^\lambda - B^\nu(\boldsymbol{x})\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}A^\alpha(\boldsymbol{x})dx^\beta + O(dx^\beta dx^\lambda)\right)g_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})\\
&= \left(A^\mu B^\nu - A^\mu\Gamma^\nu{}_{\kappa\lambda}B^\kappa dx^\lambda - B^\nu\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}A^\alpha dx^\beta\right)\left(g_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}) + g_{\mu\nu,\tau}(\boldsymbol{x})dx^\tau + O(dx^{\tau 2})\right)\\
&= g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu + g_{\mu\nu,\tau}dx^\tau A^\mu B^\nu - g_{\mu\nu}A^\mu\Gamma^\nu{}_{\kappa\lambda}B^\kappa dx^\lambda - g_{\mu\nu}B^\nu\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}A^\alpha dx^\beta + O(dx^\beta x^\tau) + O(dx^\lambda x^\tau)\\
&= g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu + g_{\mu\nu,\tau}dx^\tau A^\mu B^\nu - g_{\mu\nu}\Gamma^\nu{}_{\kappa\lambda}dx^\lambda A^\mu B^\kappa - g_{\mu\nu}\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}dx^\beta A^\alpha B^\nu\\
&= g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu + g_{\mu\nu,\beta}dx^\beta A^\mu B^\nu - g_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha{}_{\nu\beta}dx^\beta A^\mu B^\nu - g_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}dx^\beta A^\mu B^\nu\\
&= g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu + \left(g_{\mu\nu,\beta} - g_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha{}_{\nu\beta} - g_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\right)dx^\beta A^\mu B^\nu
\end{aligned}$$

となる．なお，dx^* の 2 次以上の項は無視してよいので随時切り捨てている．よって，満たすべき条件は,

$$\boldsymbol{A}_{\parallel}(\boldsymbol{x};d\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{B}_{\parallel}(\boldsymbol{x};d\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \left(g_{\mu\nu,\beta} - g_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha{}_{\nu\beta} - g_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\right)dx^\beta A^\mu B^\nu = 0$$

となる．いま，ベクトル A, B は任意のベクトルだから結局条件式は添字を整理すると,

$$g_{\alpha\beta,\,\gamma} - g_{\alpha\omega}\Gamma^\omega{}_{\beta\gamma} - g_{\omega\beta}\Gamma^\omega{}_{\alpha\gamma} = 0 \tag{1}$$

となる．(1) 式は,

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = g_{\alpha\omega}\Gamma^\omega{}_{\beta\gamma}$$

の関係式 (※定義式と見てもかまわない) と， $g_{\omega\beta} = g_{\beta\omega}$ を用いると,

$$g_{\alpha\beta,\,\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta\gamma} - \Gamma_{\beta\alpha\gamma} = 0$$

と表される．ここで, 添字の入れ替えを行うと,

$$g_{\alpha\beta,\,\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta\gamma} - \Gamma_{\beta\alpha\gamma} = 0, \tag{2}$$

$$g_{\alpha\gamma,\,\beta} - \Gamma_{\alpha\gamma\beta} - \Gamma_{\gamma\alpha\beta} = 0, \tag{3}$$

$$g_{\gamma\beta,\,\alpha} - \Gamma_{\gamma\beta\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma\alpha} = 0, \tag{4}$$

の 3 つの式が得られる．さて,

$$\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}}\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'} - \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\gamma'}}$$

より，$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ は明らかにテンソルの変換則を満たしていない． しかし，右辺の第 2 項は $\dfrac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}\dfrac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\gamma'}} = \dfrac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}\dfrac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\gamma'}\partial x^{\beta'}}$ より添字 β' と γ' の入れ替えに対して対称となっている．そこで,

$$\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}-\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta}=\Gamma^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'}-\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\gamma'}}-\left(\Gamma^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'}-\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\gamma'}\partial x^{\beta'}}\right)$$

より,

$$\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}\left(\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}-\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta}\right)=\left(\Gamma^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'}-\Gamma^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'}\right)$$

つまり $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ の下付きの添字 $\beta,\ \gamma$ に関する反対称部分,

$$\Gamma^{\alpha}{}_{[\beta\gamma]}\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{2}\left(\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}-\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta}\right)$$

はテンソルになる.

$$\Gamma^{\alpha'}{}_{[\beta'\gamma']}=\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}\Gamma^{\alpha}{}_{[\beta\gamma]} \tag{5}$$

さて，我々が興味ある空間は局所的には平坦な空間と区別できない空間である．つまり任意の点において局所的にはデカルト座標が選べる． 具体的に言えば自由落下する物体を観測者とする系である． このとき，接続係数 $\Gamma^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'}$ は，0 となる．一方,

$$\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}=\Gamma^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'}-\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\gamma'}}$$

がなりたつから, $\Gamma^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'}=0$ より,

$$\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}=-\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\gamma'}} \tag{6}$$

が得られる．ここで下付き添字を入れ替えた式を作ると,

$$\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta}=-\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\gamma'}\partial x^{\beta'}} \tag{7}$$

も成り立つから，(6) − (7) より,

$$\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}\left(\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}-\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta}\right)=0$$

つまり,

$$\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}\Gamma^{\alpha}{}_{[\beta\gamma]}=0 \tag{8}$$

が成り立つ．ところが (8) 式の左辺は (5) 式より $\Gamma^{\alpha'}{}_{[\beta'\gamma']}$ に等しいから，結局接続係数 $\Gamma^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'}=0$ からその反対称部分 $\Gamma^{\alpha'}{}_{[\beta'\gamma']}=0$ も示されたことになる．すると $\Gamma^{\alpha'}{}_{[\beta'\gamma']}$ はテンソルであるから，$\Gamma^{\alpha'}{}_{[\beta'\gamma']}=0$ であるなら任意の座標系で $\Gamma^{\alpha}{}_{[\beta\gamma]}=0$ が成り立つ．つまり，接続係数 $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ は任意の座標系で対称，つまり $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}=\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta}$ であることが示されたことになる．この対称性を用いると,

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma}=g_{\alpha\omega}\Gamma^{\omega}{}_{\beta\gamma}=g_{\alpha\omega}\Gamma^{\omega}{}_{\gamma\beta}=\Gamma_{\alpha\gamma\beta}$$

が成り立つので，(2) + (3) − (4) を計算すると,

$$\begin{aligned}(2)+(3)-(4)&=g_{\alpha\beta,\,\gamma}-\Gamma_{\alpha\beta\gamma}-\Gamma_{\beta\alpha\gamma}+g_{\alpha\gamma,\,\beta}-\Gamma_{\alpha\gamma\beta}-\Gamma_{\gamma\alpha\beta}-g_{\gamma\beta,\,\alpha}+\Gamma_{\gamma\beta\alpha}+\Gamma_{\beta\gamma\alpha}\\&=(g_{\alpha\beta,\,\gamma}+g_{\alpha\gamma,\,\beta}-g_{\gamma\beta,\,\alpha})-\Gamma_{\alpha\beta\gamma}-\Gamma_{\beta\alpha\gamma}-\Gamma_{\gamma\alpha\beta}-\Gamma_{\alpha\gamma\beta}+\Gamma_{\beta\gamma\alpha}+\Gamma_{\gamma\beta\alpha}\\&=(g_{\alpha\beta,\,\gamma}+g_{\alpha\gamma,\,\beta}-g_{\gamma\beta,\,\alpha})-\Gamma_{\alpha\beta\gamma}-\Gamma_{\beta\alpha\gamma}-\Gamma_{\gamma\alpha\beta}-\Gamma_{\alpha\beta\gamma}+\Gamma_{\beta\alpha\gamma}+\Gamma_{\gamma\alpha\beta}\\&=(g_{\alpha\beta,\,\gamma}+g_{\alpha\gamma,\,\beta}-g_{\gamma\beta,\,\alpha})-2\Gamma_{\alpha\beta\gamma}\\&=0\end{aligned}$$

これより，

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\beta,\,\gamma} + g_{\alpha\gamma,\,\beta} - g_{\gamma\beta,\,\alpha}\right)$$

となることが示せた．よって接続係数は，計量を用いて，

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\omega}\left(g_{\omega\beta,\,\gamma} + g_{\omega\gamma,\,\beta} - g_{\gamma\beta,\,\omega}\right)$$

すなわち，

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\omega}\left(\frac{\partial g_{\omega\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\omega\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^{\omega}}\right)$$

となることが示された．